

Přednáška č. 4:

Stejnoseměrné obvody

Obsah

		3	Metoda uzlových napětí	18	
1	Stacionární ustálený stav (S.U.S.)	2	4	Výpočetní příklady	31
2	Analýza obvodů ve S.U.S.	5	5	Literatura	38

1 Stacionární ustálený stav (S.U.S.)

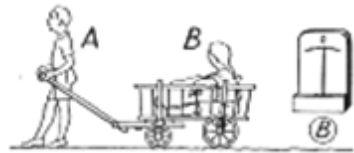
- Aktivní obvodové prvky (zdroje) mají konstantní průběh napětí/proudu v čase
- Konstantní napětí značíme U , konstantní proud značíme I

Chování základních pasivních dvojpólů při S.U.S

- Rezistor o odporu R
 - platí Ohmův zákon $U = R \cdot I$
 - pro rezistor platí vždy (nezávisle na časovém charakteru U, I)

- Induktor (cívka) o indukčnosti L
 - platí $u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = L \frac{I_L}{dt} = 0$ (protože proudy i napětí jsou konstantní)
 - induktor se ve stejnosměrném obvodu chová jako zkrat ($U = 0$ a $I = konst.$)
- Kapacitor (kondenzátor) o kapacitě C
 - platí $i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = C \frac{U_C}{dt} = 0$ (protože proudy i napětí jsou konstantní)
 - kapacitor se ve stejnosměrném obvodu chová jako rozpojený obvod ($I = 0$ a $U = konst.$)

L



A ist unbewegt: B ist unbewegt.
 (Stromkreis (A) ist offen,
 kein Induktionsstrom in (B))



A fährt an: B fällt nach hinten.
 (Stromschließen von Stromkreis (A)
 Induktionsstrom im Stromkreis (B)).



A fährt weiter: B unbewegt.
 (Stromkreis (A) bleibt geschlossen,
 kein Strom im Stromkreis (B)).



A hält an: B fällt nach vorn

C



Gleichstrom
 Kondensator



Gleichstrom
 Kondensator



Gleichstrom
 Kondensator

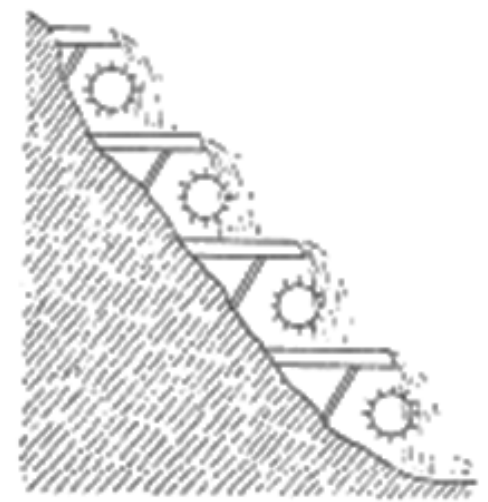


Wechselstrom
 Kondensator

2 Analýza obvodů ve S.U.S.

Vše vychází z Ohmova zákona $R = \frac{U}{I}$

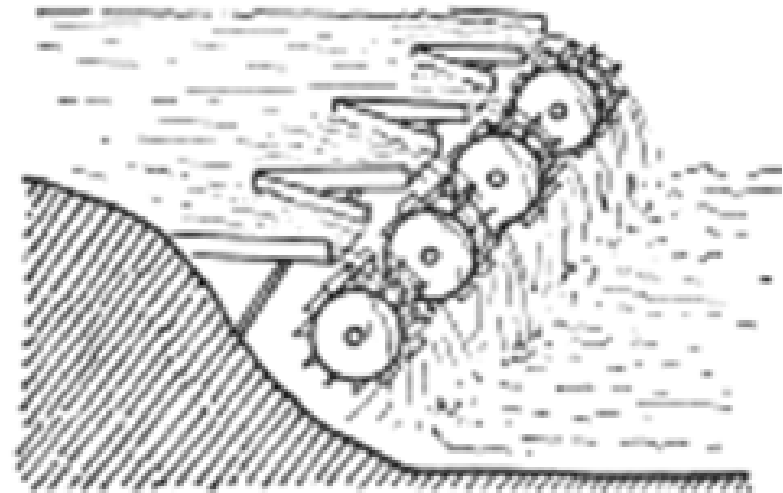
- Metoda postupného zjednodušování (sériové a paralelní řazení odporů)
- Dělič napětí
- Dělič proudu
- Metoda superpozice
- Theveninův a Nortonův teorém
- Transfigurace trojúhelník/hvězda



Sériové a paralelní řazení prvků

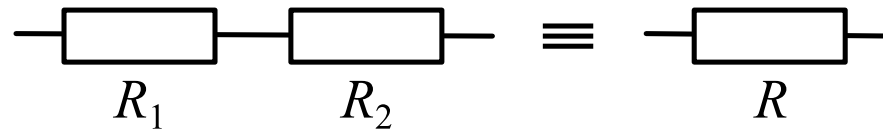
- Sériové řazení (*za sebou*, sériově, v sérii)
 - Definice: 2 prvky jsou v sérii, teče-li jimi stejný proud a celkové napětí na nich je součtem dílčích napětí
 - tj. $I_1 = I_2$ a $U_{12} = U = U_1 + U_2$
 - Topologicky: 2 prvky jsou v sérii, jsou-li bezprostředně za sebou a do uzlu mezi prvky neústí žádná další větev (kromě 2 větví odpovídajících 2 sériovým prvkům)

- Paralelní řazení (*vedle sebe*, paralelně)
 - Definice: 2 prvky jsou zapojeny paralelně, je-li na nich stejné napětí a jejich celkový proud je součtem dílčích proudů
 - tj. $U_1 = U_2$ a $I_{12} = I = I_1 + I_2$
 - Topologicky: 2 prvky jsou paralelně, jsou-li začátky a konce obou prvků vodivě spojeny



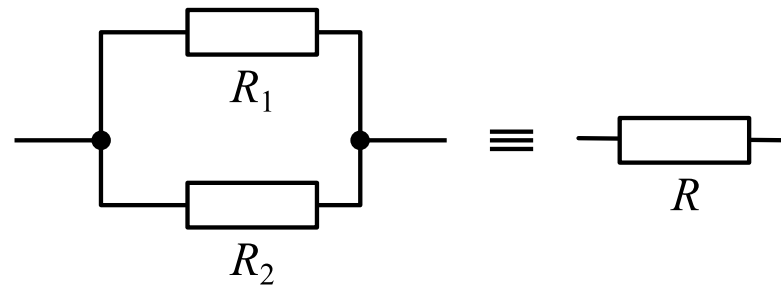
Sériové a paralelní řazení rezistorů

- Sériové řazení rezistorů



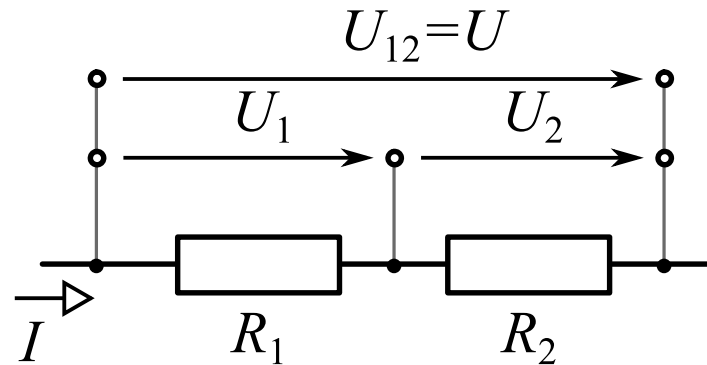
$$R = R_1 + R_2$$

- Paralelní řazení rezistorů



$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Dělič napětí



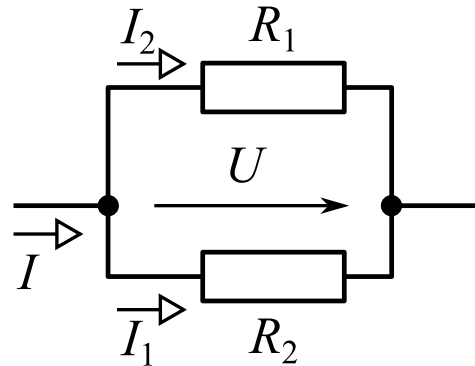
- je část obvodu, kterou tvoří sériově řazené rezistory R_1 a R_2
- je vztah pro výpočet dílčího napětí z celkového napětí

Pro rezistory v sérii platí: $I_1 = I_2$, $U_{12} = U = U_1 + U_2$

Odvodíme $\frac{U_1}{U} = \frac{U_1}{U_1 + U_2} = \frac{R_1 \cdot I}{R_1 \cdot I + R_2 \cdot I} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$

- Výsledné vztahy: $\frac{U_1}{U} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ $\frac{U_2}{U} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$

Dělič proudu



- je část obvodu, kterou tvoří paralelně řazené rezistory R_1 a R_2
- je vztah pro výpočet dílčího proudu z celkového proudu

Pro rezistory paralelně platí: $U_1 = U_2$, $I_{12} = I = I_1 + I_2$

$$\text{Odvodíme } \frac{I_1}{I} = \frac{I_1}{I_1 + I_2} = \frac{\frac{U}{R_1}}{\frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}} = \frac{\frac{U}{R_1}}{\frac{R_2 \cdot U + R_1 \cdot U}{R_1 \cdot R_2}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

- Výsledné vztahy: $\frac{I_1}{I} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ $\frac{I_2}{I} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$

Metoda postupného zjednodušování

- Použitelnost:
 - pro výpočet dílčích napětí/proudů v nejjednodušších obvodech (maximálně 1 zdroj, jednodušší konfigurace rezistorů)
- Postup:
 - Pohledem na obvod zjistíme které odpory jsou v sérii a které paralelně (pozor, může se stát, že nic nebude ani v sérii ani paralelně - pak je třeba počítat jinou metodou).

- Postupné zjednodušování obvodu: postupně nahradíme sériové odpory náhradním odporem $R = R_1 + R_2$ a odpory paralelně náhradním odporem $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$, tak postupně vznikají čím dál jednodušší meziobvody, až nakonec vznikne obvod s jediným zdrojem a rezistorem.
- Zpětné dopočítávání chybějících hodnot: pokud chceme určit nějaké dílčí napětí/proud, vracíme se zpět přes jednotlivé meziobvody až do původního (výchozího, složitějšího) obvodu a ve všech meziobvodech pomocí Ohmova zákona dopočítáme chybějící hodnoty (proud nebo napětí).

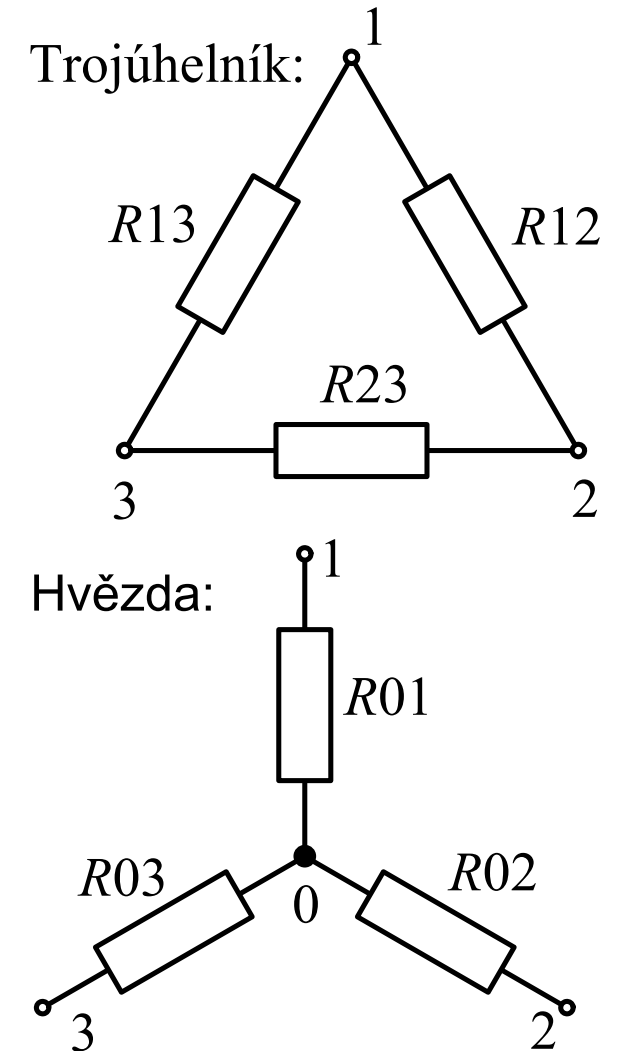
Metoda superpozice

- Použitelnost:
 - pro výpočet dílčích napětí/proudů v obvodech s více zdroji.
 - Princip je použitelný v obvodech s libovolným napájením (nejen v obvodech ve S.U.S.), ovšem pouze v lineárních obvodech (všechny obvodové prvky musí být lineární).
- Postup:
 - Úlohu výpočtu určitého napětí $U_?$ nebo proudu $I_?$ rozdělíme na tolik dílčích úloh, kolik je v obvodu zdrojů (necht' je jich n).

- Každá dílčí (k -tá) úloha potom bude obvod s jediným zdrojem, přičemž všechny ostatní zdroje vyřadíme:
 - * Vyřazení zdroje napětí - nahradíme jej zkratem příslušné větve ($U = 0$).
 - * Vyřazení zdroje proudu - nahradíme jej rozpojením příslušné větve ($I = 0$).
- Pro každou dílčí (k -tou) úlohu spočítáme příspěvek dílčího napětí $U_{?k}$ nebo proudu $I_{?k}$ (metodou postupného zjednodušování, pomocí děličů, nebo i jinak).
- Napětí $U_?$ nebo proud $I_?$ původní úlohy získáme jako součet výsledků dílčích úloh $U_? = \sum_{k=1}^n U_{?k}$ resp. $I_? = \sum_{k=1}^n I_{?k}$. Dbáme na polaritu.

Transfigurace hvězda-trojúhelník, trojúhelník-hvězda

- Použitelnost:
 - jako dílčí krok pro výpočet napětí/proudů v určitých typech obvodů
- Princip
 - Z pohledu zbytku obvodu lze nahradit část obvodu (hvězdu resp. trojúhelník) jinou částí obvodu (trojúhelníkem resp. hvězdou)



– Obvody popisují 3 rovnice o 6 neznámých:

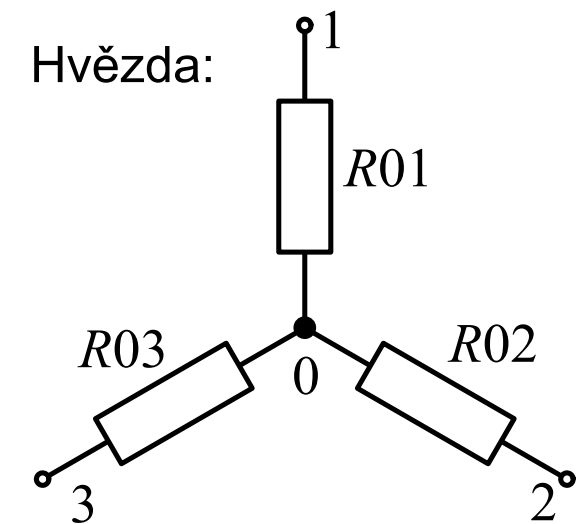
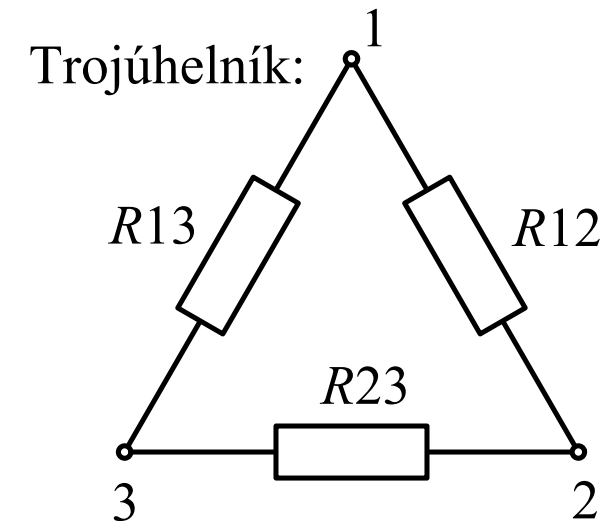
$$(1) : R_{01} + R_{02} = \frac{R_{12} \cdot (R_{13} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

$$(2) : R_{02} + R_{03} = \frac{R_{23} \cdot (R_{12} + R_{13})}{R_{23} + R_{12} + R_{13}}$$

$$(3) : R_{01} + R_{03} = \frac{R_{13} \cdot (R_{12} + R_{23})}{R_{13} + R_{12} + R_{23}}$$

– Transfigurace Trojúhelník/Hvězda: Z rovnic vyjádříme hodnoty R_{01} , R_{02} a R_{03} pomocí hodnot R_{12} , R_{13} a R_{23} .

– Transfigurace Hvězda/Trojúhelník: Z rovnic vyjádříme hodnoty R_{12} , R_{13} a R_{23} pomocí hodnot R_{01} , R_{02} a R_{03} .



– Transfigurace Trojúhelník/Hvězda:

$$R_{01} = \frac{R_{12} \cdot R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

$$R_{02} = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

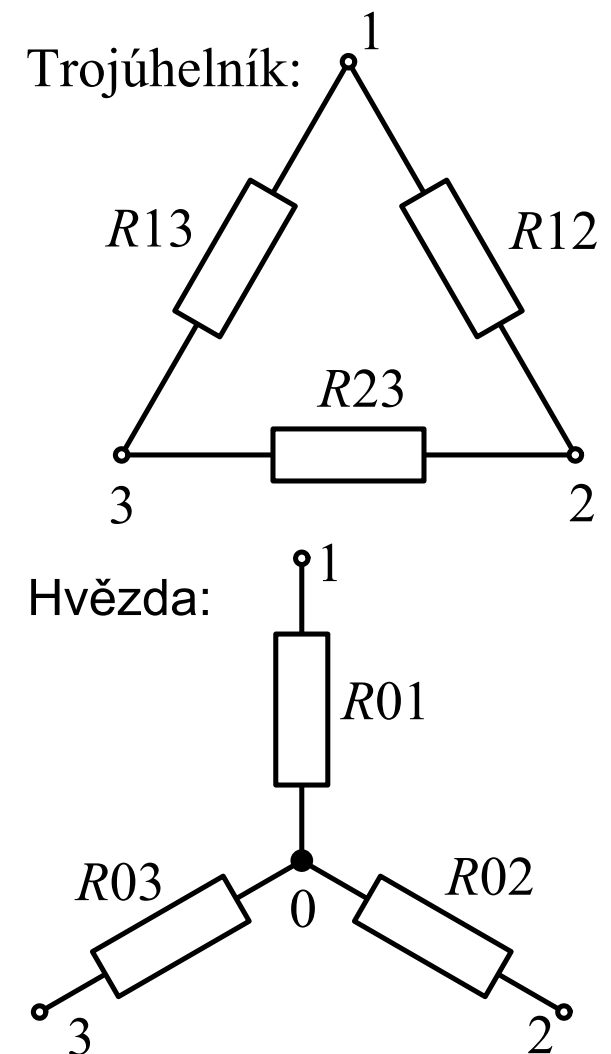
$$R_{03} = \frac{R_{13} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

– Transfigurace Hvězda/Trojúhelník:

$$R_{12} = R_{01} + R_{02} + \frac{R_{01} \cdot R_{02}}{R_{03}}$$

$$R_{13} = R_{01} + R_{03} + \frac{R_{01} \cdot R_{03}}{R_{02}}$$

$$R_{23} = R_{02} + R_{03} + \frac{R_{02} \cdot R_{03}}{R_{01}}$$



3 Metoda uzlových napětí

- Obecná metoda pro analýzu (lineárních) obvodů.
- Lze použít i pro složité obvody, pouze je vyšší počet rovnic.
- Vychází z 1. Kirchhoffova zákona – součet proudů tekoucích **z jednoho uzlu** musí být roven nule.

Řešený příklad:

Určete proudy a napětí na všech prvcích obvodu.

Zadáno:

$$I_1 = 0.1 \text{ A}$$

$$I_2 = 0.2 \text{ A}$$

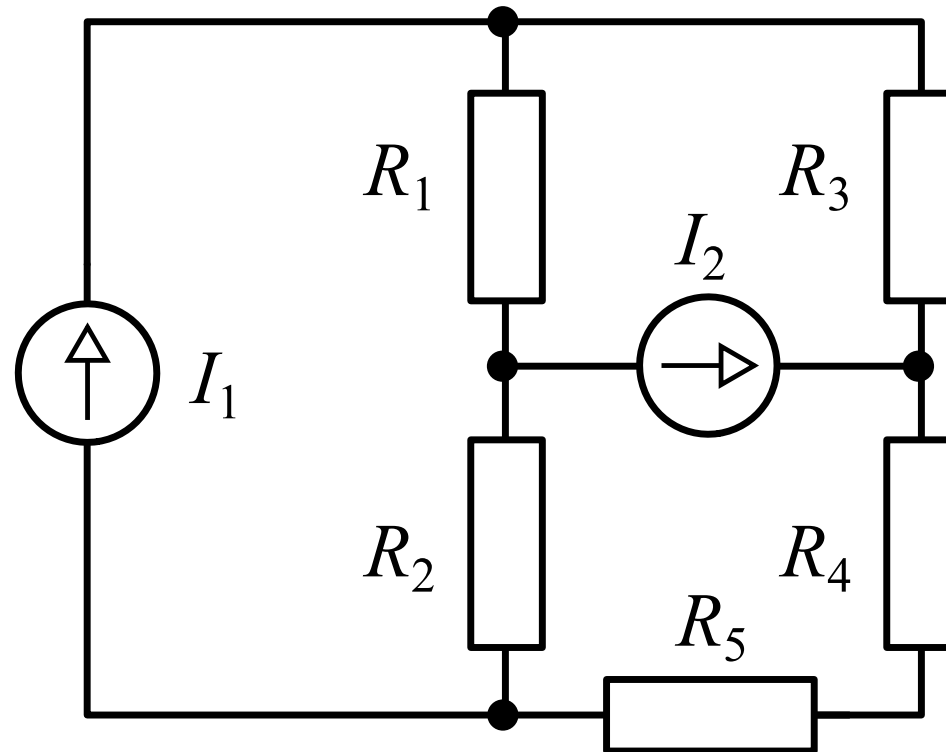
$$R_1 = 20 \ \Omega$$

$$R_2 = 40 \ \Omega$$

$$R_3 = 60 \ \Omega$$

$$R_4 = 70 \ \Omega$$

$$R_5 = 10 \ \Omega$$

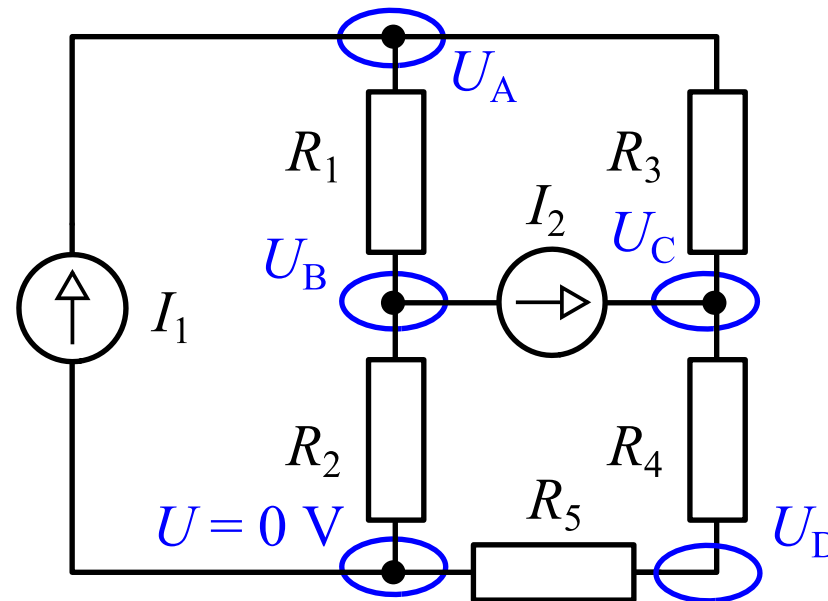


Metoda uzlových napětí - postup

1. Označení uzlů

- Jeden z uzlů označíme jako referenční, tam budeme předpokládat nulové napětí (potenciál).
- Ostatní uzly označíme libovolně jako neznámá uzlová napětí.
- *pozor: uzel může existovat i bez rozvětvení obvodu: viz uzel U_D v řešeném příkladu*

Řešený příklad, označení uzlů:



2. Sestavení rovnic:

- Pro všechny uzly kromě referenčního sestavíme (obvodové) rovnice podle 1. Kirchhoffova zákona, přičemž za proudy dosazujeme pomocí (uzlových) napětí, které se vyskytují v daných uzlech. Přitom ještě dbáme na směr proudů/napětí.

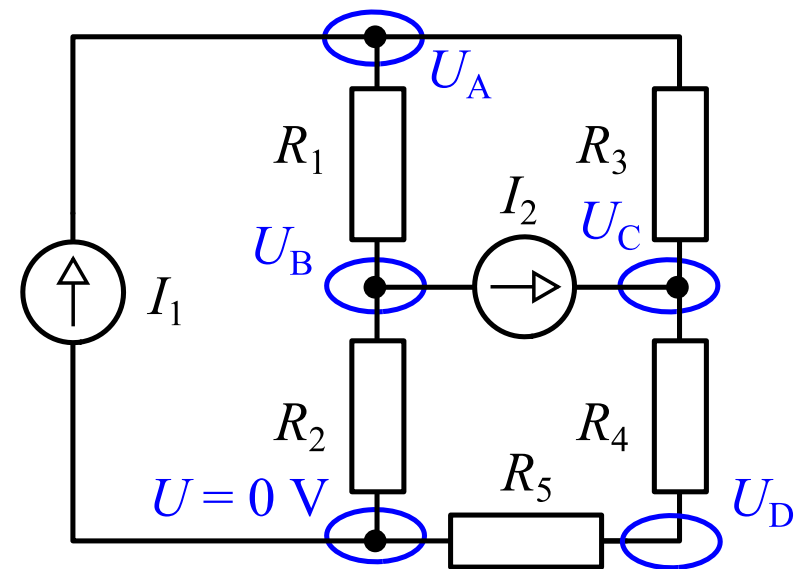
Řešený příklad:

$$\text{Rce } U_A: -I_1 + \frac{U_A - U_B}{R_1} + \frac{U_A - U_C}{R_3} = 0$$

$$\text{Rce } U_B: \frac{U_B - U_A}{R_1} + I_2 + \frac{U_B}{R_2} = 0$$

$$\text{Rce } U_C: -I_2 + \frac{U_C - U_A}{R_3} + \frac{U_C - U_D}{R_4} = 0$$

$$\text{Rce } U_D: \frac{U_D - U_C}{R_4} + \frac{U_D}{R_5} = 0$$



3. Řešení rovnic:

- Vyřešíme soustavu obvodových rovnic a získáme neznámé - hodnoty uzlových napětí.

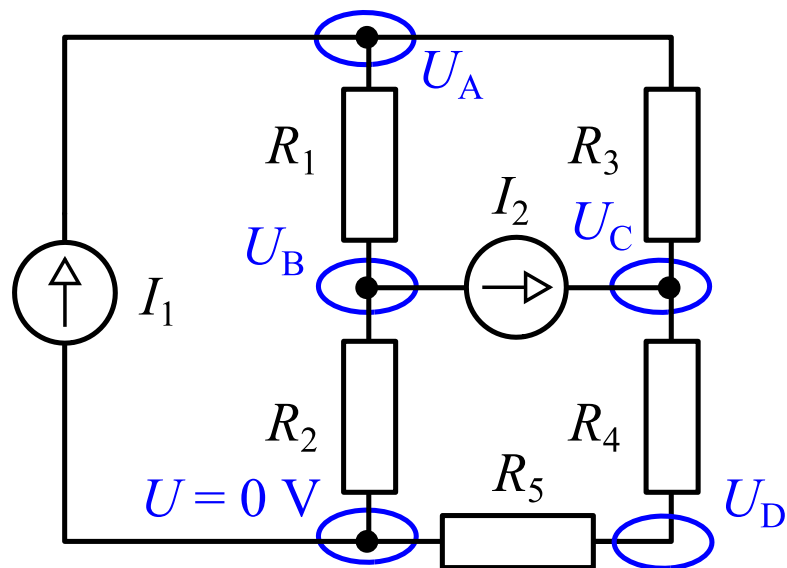
Řešený příklad:

$$U_A = 3.4 \text{ V}$$

$$U_B = -0.4 \text{ V}$$

$$U_C = 8.8 \text{ V}$$

$$U_D = 1.1 \text{ V}$$



4. Dopočtení požadovaných veličin:

- Všechna napětí a proudy v obvodu lze určit pomocí vypočtených uzlových napětí.

Řešený příklad:

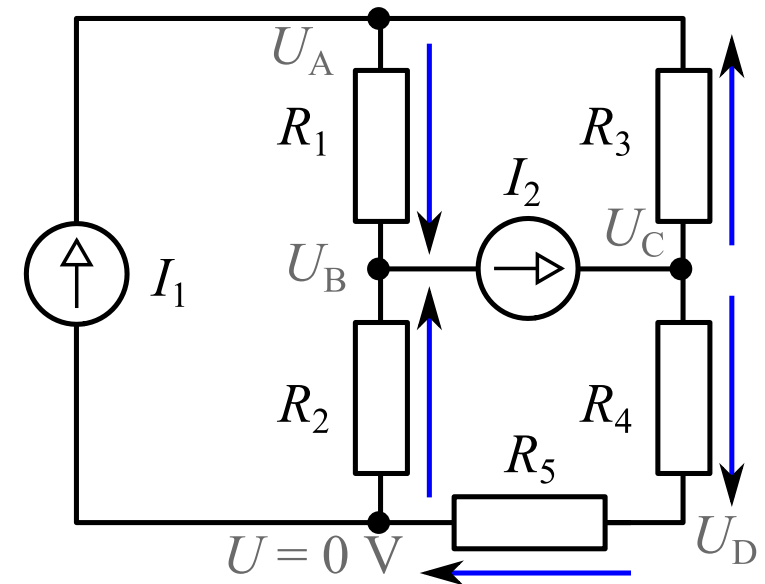
$$U_{R1} = U_A - U_B = 3.4 - (-0.4) = 3.8 \text{ V}$$

$$U_{R2} = 0 - U_B = 0 - (-0.4) = 0.4 \text{ V}$$

$$U_{R3} = U_C - U_A = 8.8 - 3.4 = 5.4 \text{ V}$$

$$U_{R4} = U_C - U_D = 8.8 - 1.1 = 7.7 \text{ V}$$

$$U_{R5} = U_D - 0 = 1.1 - 0 = 1.1 \text{ V}$$



$$I_{R1} = \frac{U_{R1}}{R_1} = 0.19 \text{ A}$$

$$I_{R2} = \frac{U_{R2}}{R_2} = 0.01 \text{ A}$$

$$I_{R3} = \frac{U_{R3}}{R_3} = 0.09 \text{ A}$$

$$I_{R4} = \frac{U_{R4}}{R_4} = 0.11 \text{ A}$$

$$I_{R5} = \frac{U_{R5}}{R_5} = 0.11 \text{ A}$$

Píšeme rozdíl napětí s kladným výsledkem. To udává polaritu výsledků.

Zdroje napětí u metody uzlových napětí

- Obvodové rovnice mají jednotky proudu - ampéry.
- Není problém zahrnout do rovnic zdroje proudu.
- Jakým způsobem uvažovat zdroj napětí?
 - Využijeme toho, že zdroj napětí udržuje na svých svorkách napětí. Referenční uzel volíme u zdroje napětí na jeho nižším napětí. Napětí uzlu na druhé straně zdroje napětí je dáno hodnotou napětí zdroje. Je-li napětí známé, je třeba snížit počet rovnic - nepsat pro uzel odpovídající zdroji napětí rovnici, pouze uvažovat příslušné uzlové napětí v ostatních rovnicích.

Metoda uzlových napětí - rozšířený postup pro obvody se zdrojem napětí

1. Jeden z uzlů označíme jako referenční (tam budeme předpokládat $U = 0$ V). Pokud je v obvodu zdroj napětí, volíme referenční uzel na jeho svorce s nižším napětím.
2. Pro ostatní uzly (pro "nerreferenční") sestavíme (obvodové) rovnice podle 1. Kirchhoffova zákona, přičemž za proudy dosazujeme pomocí (uzlových) napětí, které se vyskytují v daných uzlech. Přitom ještě dbáme na směr proudů/napětí. Je-li v obvodu zdroj napětí, nesestavujeme rovnici ani pro uzel odpovídající svorce zdroje napětí.

3. Vyřešíme soustavu obvodových rovnic - získáme neznámé - uzlová napětí.
4. Všechna napětí a proudy v obvodu lze potom určit pomocí vypočtených uzlových napětí

Pozn.: pro více zdrojů napětí než jeden je nutné použít metodu řezů, viz literatura.

Řešený příklad:

Určete proudy a napětí na všech prvcích obvodu.

Zadáno:

$$U_1 = 3.4 \text{ A}$$

$$I_2 = 0.2 \text{ A}$$

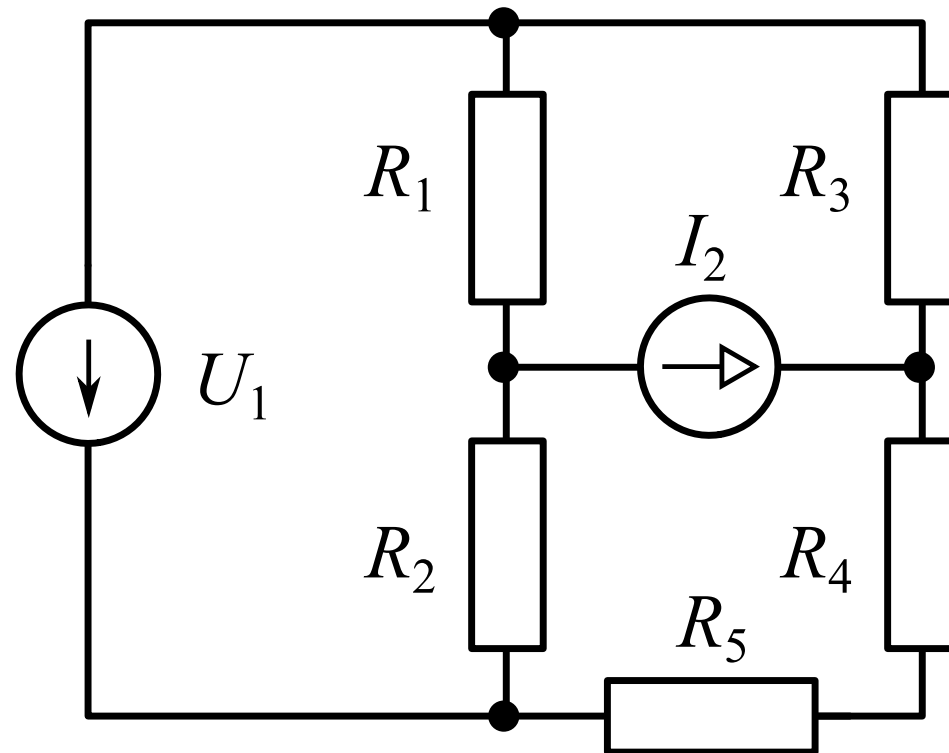
$$R_1 = 20 \ \Omega$$

$$R_2 = 40 \ \Omega$$

$$R_3 = 60 \ \Omega$$

$$R_4 = 70 \ \Omega$$

$$R_5 = 10 \ \Omega$$



1. Označení uzlů – viz obrázek.
2. Sestavení rovnic (pouze 3 rovnice!):

$$\text{Rce } U_B: \frac{U_B - U_1}{R_1} + I_2 + \frac{U_B}{R_2} = 0$$

$$\text{Rce } U_C: -I_2 + \frac{U_C - U_1}{R_3} + \frac{U_C - U_D}{R_4} = 0$$

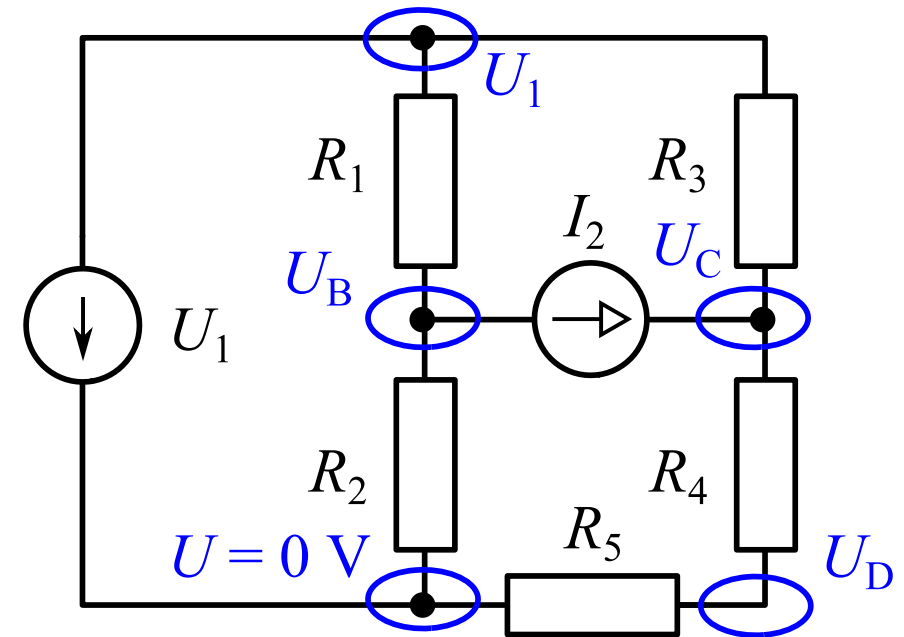
$$\text{Rce } U_D: \frac{U_D - U_C}{R_4} + \frac{U_D}{R_5} = 0$$

3. Řešení rovnic:

$$U_B = -0.4 \text{ V}$$

$$U_C = 8.8 \text{ V}$$

$$U_D = 1.1 \text{ V}$$



4. Dopočtení požadovaných veličin

$$U_{R1} = U_1 - U_B = 3.4 - (-0.4) = 3.8 \text{ V}$$

$$I_{R1} = \frac{U_{R1}}{R_1} = 0.19 \text{ A}$$

$$U_{R2} = 0 - U_B = 0 - (-0.4) = 0.4 \text{ V}$$

$$I_{R2} = \frac{U_{R2}}{R_2} = 0.01 \text{ A}$$

$$U_{R3} = U_C - U_1 = 8.8 - 3.4 = 5.4 \text{ V}$$

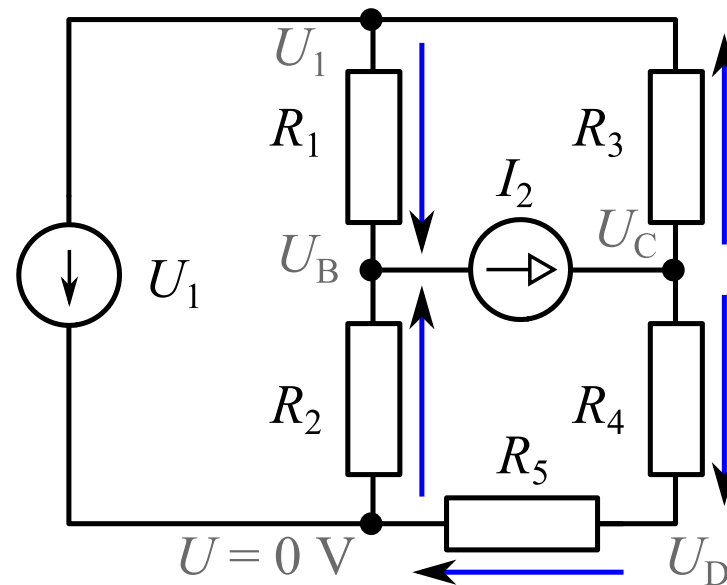
$$I_{R3} = \frac{U_{R3}}{R_3} = 0.09 \text{ A}$$

$$U_{R4} = U_C - U_D = 8.8 - 1.1 = 7.7 \text{ V}$$

$$I_{R4} = \frac{U_{R4}}{R_4} = 0.11 \text{ A}$$

$$U_{R5} = U_D - 0 = 1.1 - 0 = 1.1 \text{ V}$$

$$I_{R5} = \frac{U_{R5}}{R_5} = 0.11 \text{ A}$$



Počet rovnic a neznámých u metody uzlových napětí

- Počet rovnic a neznámých musí být shodné číslo
- Metoda uzlových napětí

$$- N_{Rovnice} = N_{Uzly} - 1 - N_{ZdrojeU}, \text{ kde}$$

* $N_{Rovnice}$... počet nezávislých rovnic

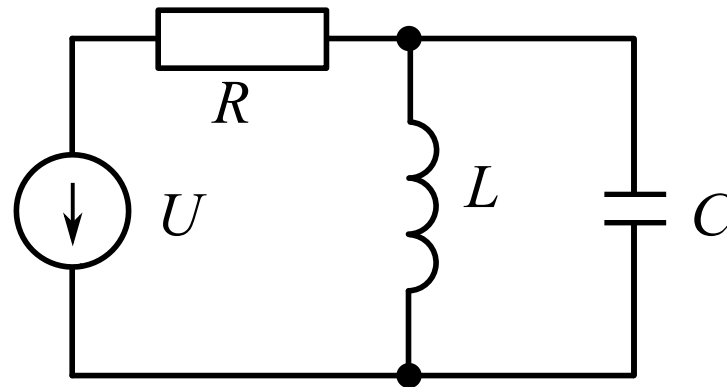
* N_{Uzly} ... počet uzlů

* $N_{ZdrojeU}$... počet zdrojů napětí

4 Výpočetní příklady

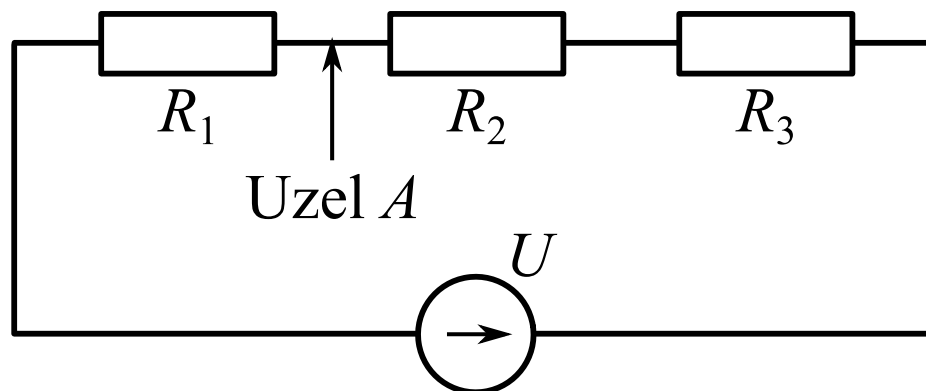
Příklad 4_1: Pro obvod ve stacionárním ustáleném stavu určete napětí a proudy na všech obvodových prvcích.

Zadáno: $U = 3 \text{ V}$, $R = 1 \text{ k}\Omega$, $L = 5 \text{ }\mu\text{H}$, $C = 570 \text{ nF}$.



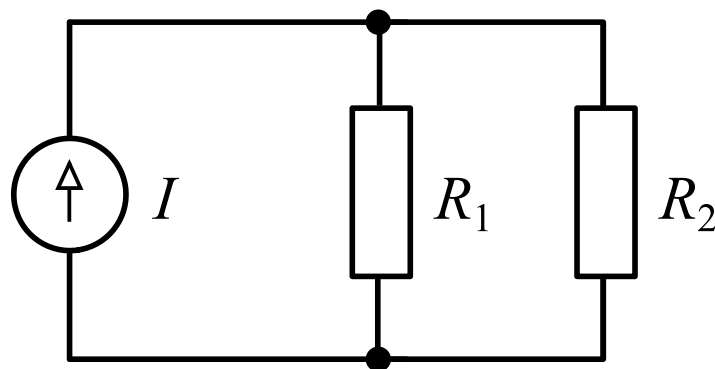
Příklad 4_2: Pro obvod ve stacionárním ustáleném stavu určete napětí na rezistoru R_2 a napětí v uzlu A .

Zadáno: $U = 30 \text{ V}$, $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 3 \Omega$, $R_3 = 10 \Omega$.



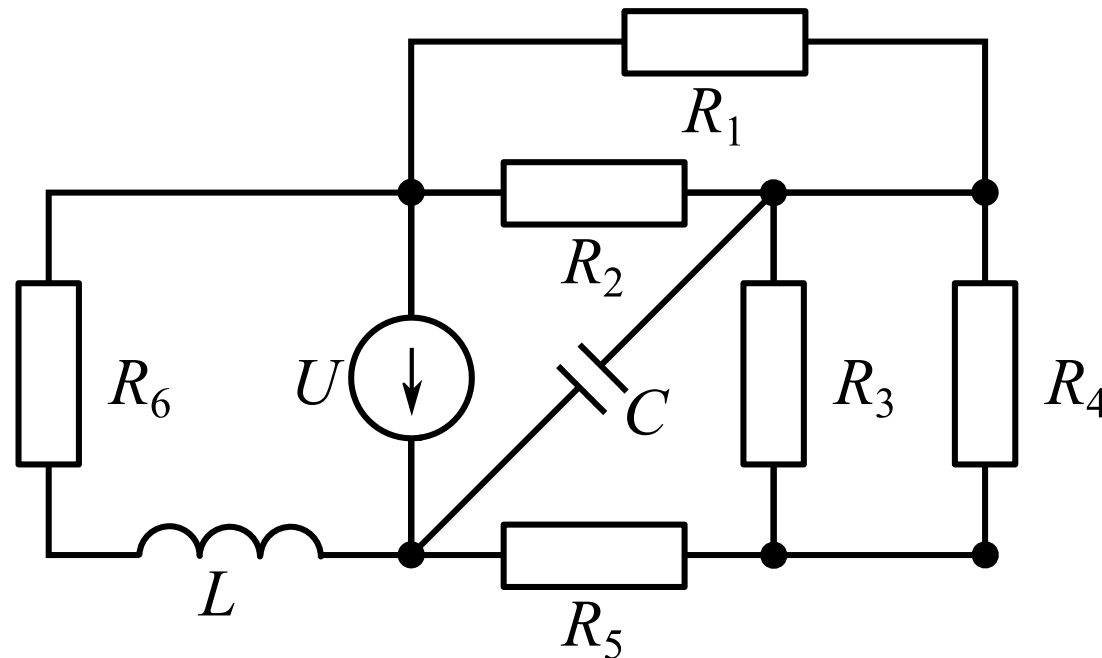
Příklad 4_3: Pro obvod ve stacionárním ustáleném stavu určete napětí na rezistoru R_2 a napětí v uzlu A .

Zadáno: $I = 5 \text{ mA}$, $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 3 \text{ k}\Omega$.



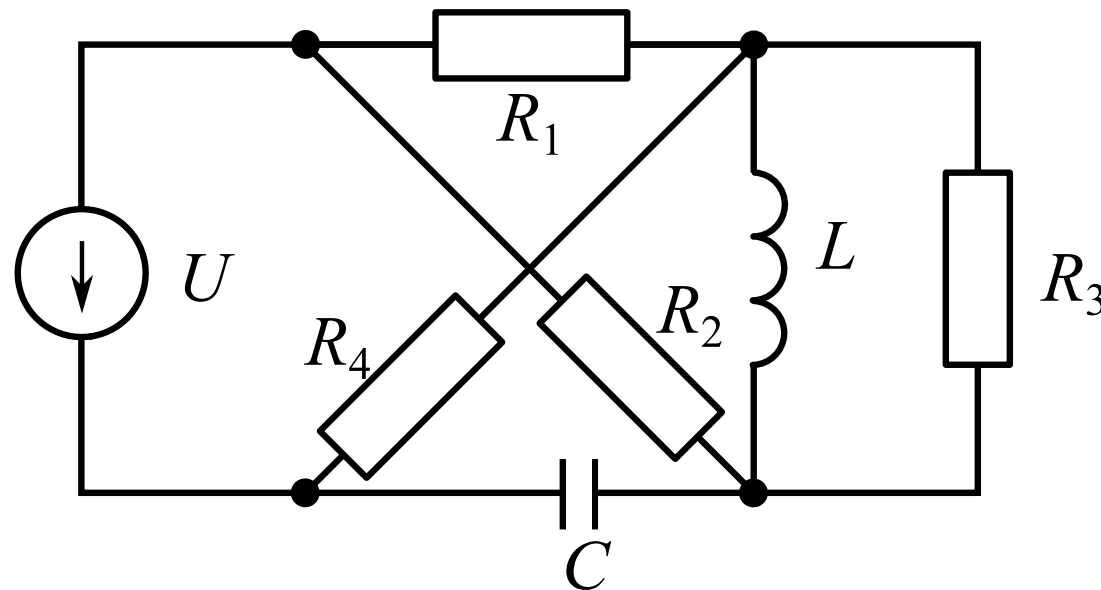
Příklad 4_4: Pro obvod ve stacionárním ustáleném stavu určete proud napětí na rezistoru R_4 .

Zadáno: $U = 20 \text{ V}$, $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 3 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 6 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 4 \text{ k}\Omega$, $R_5 = 6.4 \text{ k}\Omega$, $R_6 = 17 \text{ k}\Omega$, $L = 3 \text{ }\mu\text{H}$, $C = 330 \text{ pF}$.



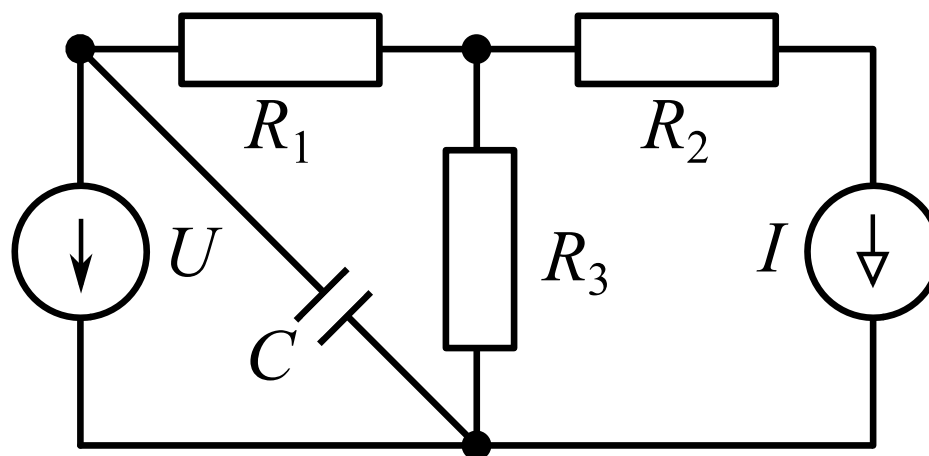
Příklad 4_5: Pro obvod ve stacionárním ustáleném stavu určete proud rezistorem R_1 a napětí na rezistoru R_4 .

Zadáno: $U = 3 \text{ V}$, $R_1 = 4 \text{ } \Omega$, $R_2 = 6 \text{ } \Omega$, $R_3 = 5.7 \text{ } \Omega$, $R_4 = 7.6 \text{ } \Omega$,
 $L = 3 \text{ } \mu\text{H}$, $C = 330 \text{ pF}$.



Příklad 4_6: Pro obvod ve stacionárním ustáleném stavu určete proud a napětí na rezistoru R_3 .

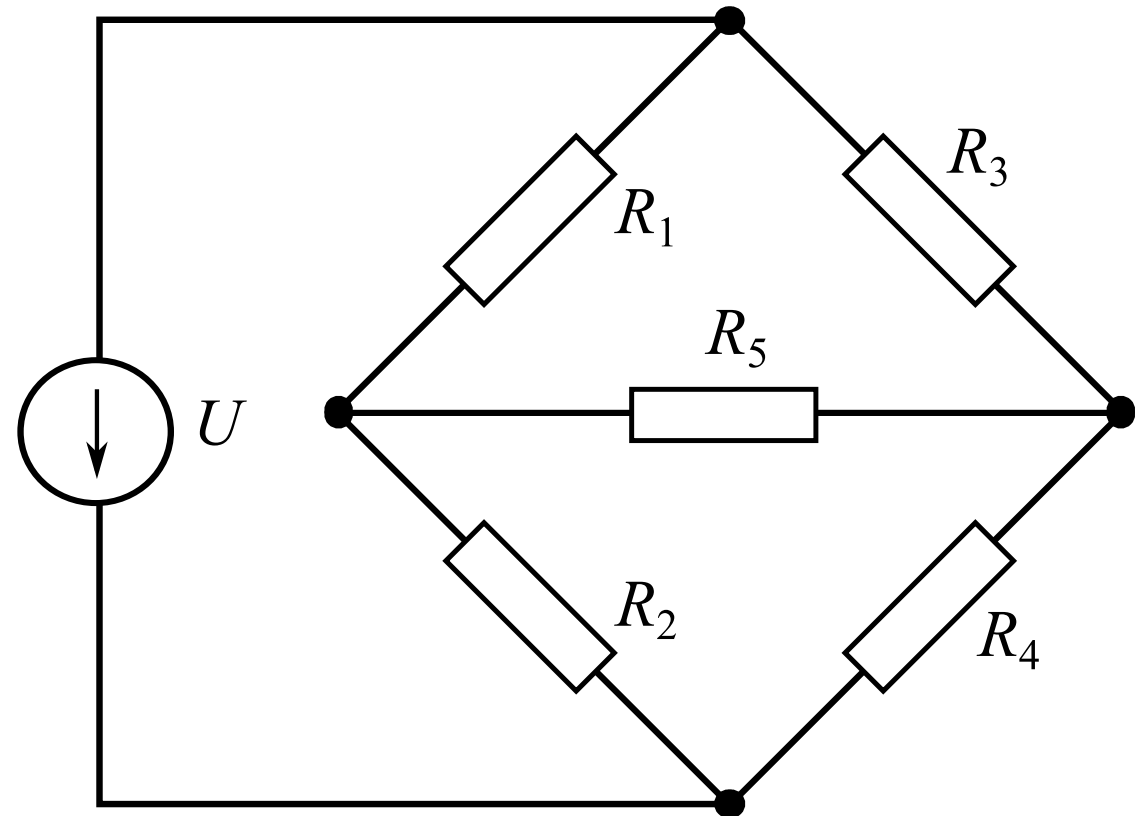
Zadáno: $U = 10 \text{ V}$, $I = 100 \text{ mA}$, $R_1 = 40 \text{ } \Omega$, $R_2 = 50 \text{ } \Omega$, $R_3 = 60 \text{ } \Omega$,
 $C = 6 \text{ } \mu\text{F}$.



Příklad 4_7: Pro obvod ve stacionárním ustáleném stavu určete proud a napětí na rezistoru R_5 .

Zadáno:

- a) $U = 10 \text{ V}$, $R_1 = 1400 \ \Omega$,
 $R_2 = 400 \ \Omega$, $R_3 = 1000 \ \Omega$,
 $R_4 = 414 \ \Omega$, $R_5 = 100 \ \Omega$.
- b) $U = 10 \text{ V}$, $R_1 = 1400 \ \Omega$,
 $R_2 = 400 \ \Omega$, $R_3 = 1050 \ \Omega$,
 $R_4 = 300 \ \Omega$, $R_5 = 300 \ \Omega$.



5 Literatura

1. Havlíček V., Pokorný M., Zemánek I.: Elektrické obvody 1, ČVUT 2005
2. Vysoký P., Malý K., Fábera V.: Základy elektrotechniky, Brno 2003
3. Büscher G.: Elektrotechnik in Bildern, Stuttgart 1943 proudů