Přednáška č. 5:
Harmonické střídavé obvody

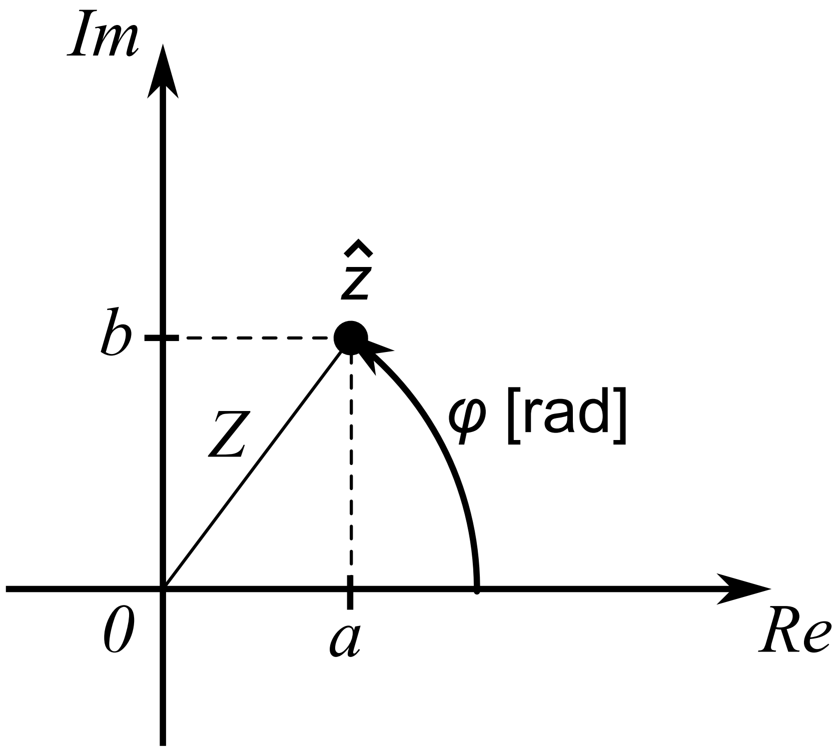
Obsah

1 Komplexní čísla

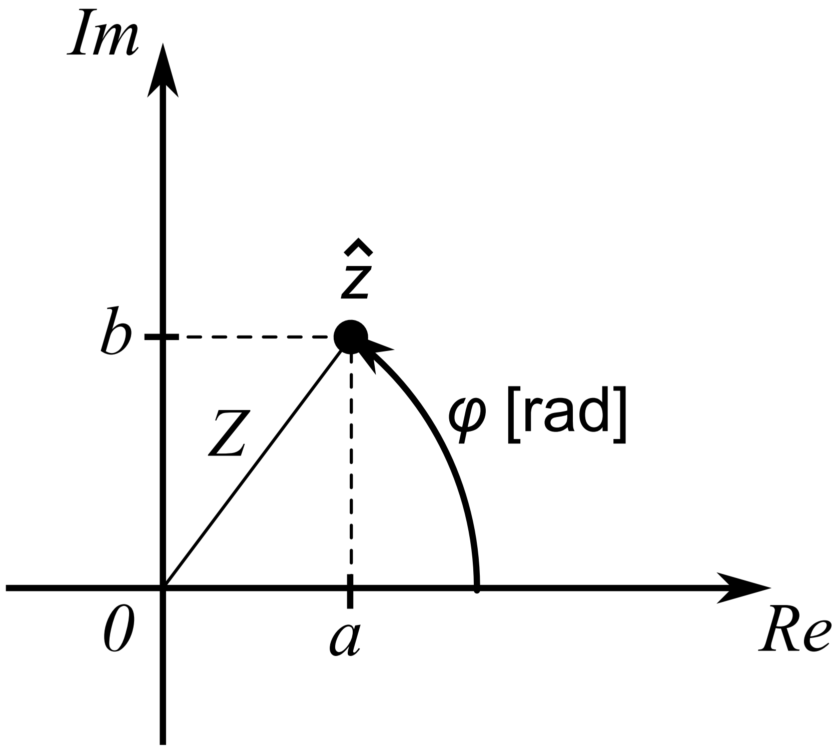
- **Eulerův vztah**

  $e^{j \cdot x} = \cos(x) + j \cdot \sin(x)$, kde $j = \sqrt{-1}$

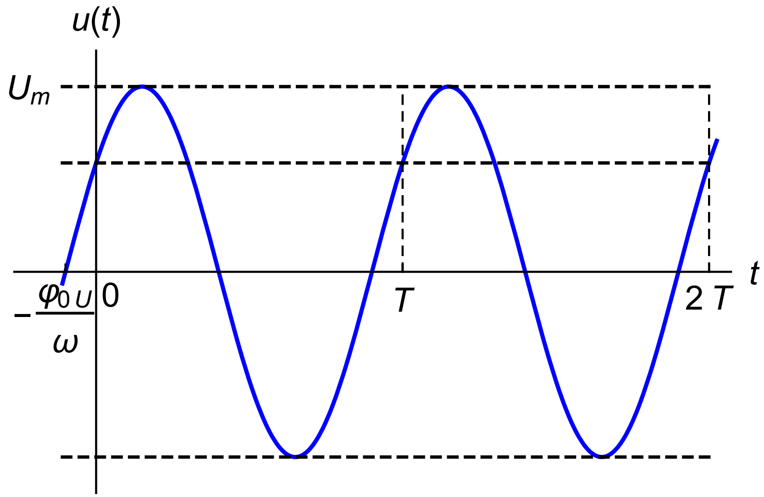
- **Tvary komplexního čísla** $\hat{z}$
  - **Součtový tvar** $\hat{z} = a + j \cdot b$
    - $a = \mathrm{Re}\{\hat{z}\}$...reálná část $\hat{z}$
    - $b = \mathrm{Im}\{\hat{z}\}$...imaginární část $\hat{z}$
  - **Exponenciální tvar** $\hat{z} = Z \cdot e^{j \cdot \varphi}$
    - $Z = |\hat{z}|$...velikost $\hat{z}$
    - φ...argument (fáze) $\hat{z}$



- **Převody komplexních čísel**
  - **Polar $\rightarrow$ Rectangular**
    - $a = |\hat{z}| \cdot \cos(\varphi)$
    - $b = |\hat{z}| \cdot \sin(\varphi)$
  - **Rectangular $\rightarrow$ Polar**
    - $Z = \sqrt{a^2 + b^2}$
    - $\varphi = \arctan \frac{b}{a}$...tento vztah neplatí vždy!



2 Harmonické veličiny



- Harmonické veličiny lze vyjádřit jako

$$u(t) = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{0U})$$

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{0I})$$

  - $u(t)$ resp. $i(t)$...okamžitá hodnota napětí [V] resp. proudu [A]
  - U_m resp. I_m...amplituda (maximální hodnota) napětí [V] resp. proudu [A]
  - $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$... úhlová rychlost (frekvence) [rad/s], kde
    - T...perioda [s]
    - f...frekvence [Hz]
  - φ_{0U} resp. φ_{0I}...počáteční fáze napětí resp. proudu

3 Harmonický ustálený stav

- Podmínky H.U.S. v elektrickém obvodu
  - Všechny aktivní prvky dodávají harmonické napětí a/nebo proudy o stejné frekvenci (kmitočtu)
  - Všechny obvodové prvky jsou lineární
  - Obvod je v ustáleném stavu (po odeznění přechodných dějů spojených např. s připojením zdrojů)
- Důsledky H.U.S. v elektrickém obvodu
  - Časový průběh všech obvodových veličin (na všech prvcích) je harmonický s konstantní amplitudou v čase.

4 Fázory

Harmonický průběh definují tři parametry: **amplituda, frekvence, počáteční fáze**. Z úpravy harmonického napětí dojdeme k definici fázoru

$$u(t) = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{0U}) = \mathrm{Im}\{U_m \cdot e^{j(\omega \cdot t + \varphi_{0U})}\} = \mathrm{Im}\{U_m \cdot e^{j\varphi_{0U}} \cdot e^{j\omega t}\}$$

- **fázor** $\hat{U}_m = U_m \cdot e^{j\varphi_{0U}}$, popř. $\hat{U} = U \cdot e^{j\varphi_{0U}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\varphi_{0U}}$
- Fázor je komplexní číslo, které reprezentuje amplitudu a počáteční fázi harmonické veličiny. Např.:
  - Harmonickému napětí $u(t) = 3 \cdot \sin(400 \cdot t + 2)$ odpovídá fázor $\hat{U}_m = 3 \cdot e^{2j}$
  - Fázoru $\hat{I}_m = 6 \cdot e^{0.3j}$ odpovídá harmonický proud $i(t) = 6 \cdot \sin(\omega \cdot t + 0.3)$

Počítání s fázory

- $U_1 \hat{+} U_2 = \hat{U}_1 + \hat{U}_2$...fázor součtu je roven součtu fázorů
- $\frac{\mathrm{d}\hat{U}}{\mathrm{d}t} = j\omega \cdot \hat{U}$...derivaci fázoru odpovídá násobení komplexní konstantou $j\omega$
- $\int_0^t \hat{U} \mathrm{d}t = \frac{1}{j\omega} \cdot \hat{U}$...integraci fázoru odpovídá dělení komplexní konstantou $j\omega$

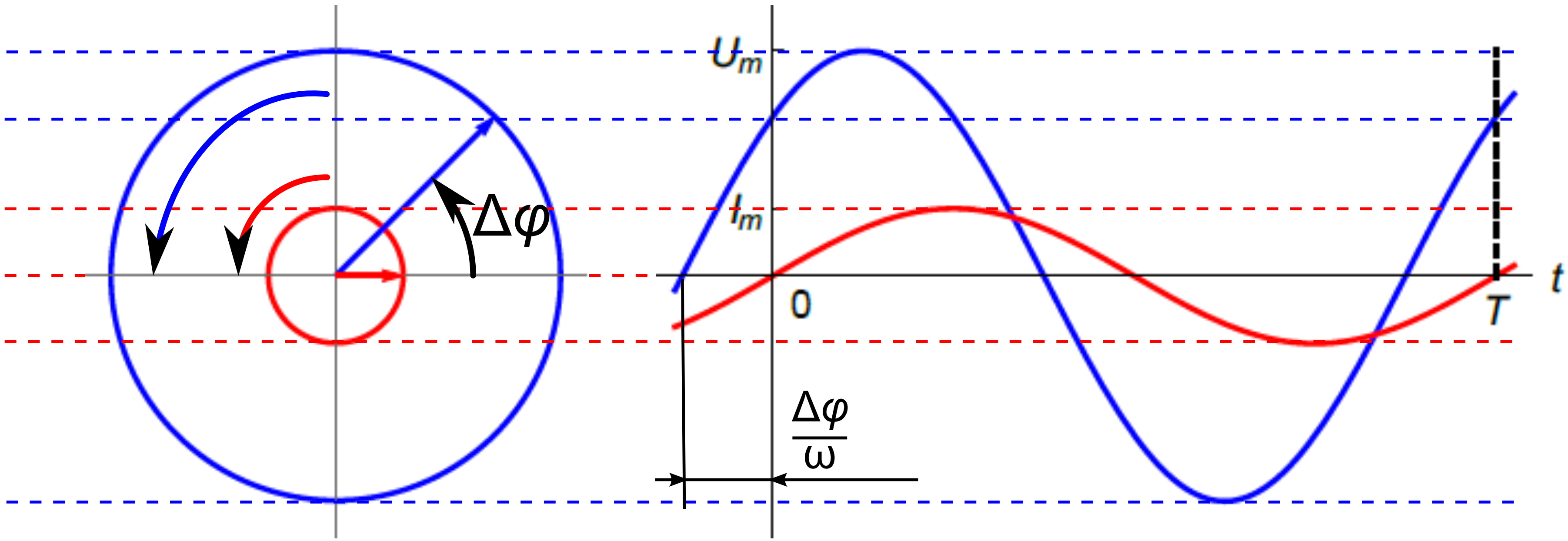
Ukázka odvození derivace fázoru:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{0U}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{Im}\{\hat{U}_m \cdot e^{j\omega t}\} = \mathrm{Im}\{j\omega \hat{U}_m \cdot e^{j\omega t}\}$$

5 Fázový posun

Fázový posun $\Delta\varphi$ [rad] je rozdíl fází dvou harmonických průběhů o stejné frekvenci.

Obrázek ukazuje dva harmonické průběhy o stejné frekvenci s různými amplitudami a různými počátečními fázemi. Obrázek vychází z toho, že sinusový průběh je průmětem y-ové souřadnice koncového bodu rotujícího vektoru jako funkce času.



6 Impedance

Chování základních prvků při harmonickém buzení lze odvodit z obecných vztahů mezi napětími a proudy na prvcích R, L a C při uvažování sinusových průběhů napětí a proudů.

Rezistor o odporu R:	$\hat{U}_R = R \cdot \hat{I}_R$
Induktor o indukčnosti L:	$\hat{U}_L = L\frac{\mathrm{d}\hat{I}_L}{\mathrm{d}t} = j\omega L \cdot \hat{I}_L$
Kapacitor o kapacitě C:	$\hat{U}_C = \frac{1}{C}\int_0^t \hat{I}_C \mathrm{d}t = \frac{1}{j\omega C} \cdot \hat{I}_C$

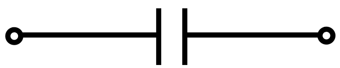
Při harmonickém buzení je fázor napětí je pro všechny prvky přímo úměrný fázoru proudu!

Zobecněný Ohmův zákon podílem fázorů napětí a proudu definuje **impedanci** $\hat{Z}$:

$$\hat{Z} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} \; [\Omega]$$

Pozor, pojem impedance má smysl pouze pro harmonické průběhy napětí a proudů!

Impedance základních pasivních dvojpólů:

Prvek	Impedance
R 	R
L 	$j\omega L$
C 	$\frac{1}{j\omega C}$

Pro impedance platí vše co bylo odvozeno na základě Ohmova zákona, jako např.:

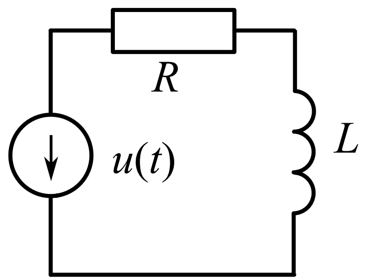
- dvě impedance v sérii lze nahradit jako $\hat{Z}_{\text{celk}} = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2$
- dvě impedance paralelně lze nahradit jako $\hat{Z}_{\text{celk}} = \frac{\hat{Z}_1 \cdot \hat{Z}_2}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}$
- vztahy pro dělič napětí, dělič proudu
- transfigurace trojúhelník-hvězda a hvězda-trojúhelník
- Theveninův teorém (viz dále předn. o zdrojích)
- metoda postupného zjednodušování
- metoda superpozice

7 Analýza harmonických obvodů

Používá se (Steinmetzova) symbolicko-komplexní metoda. **Postup:**

1. Identifikace harmonického ustáleného stavu
2. Převod z oblasti času do oblasti fázorů
   - Převod zadaných časových průběhů napětí a proudů na fázory napětí a proudů
   - Převod odporů rezistorů, indukčností induktorů a kapacit kapacitorů na impedance rezistorů, induktorů a kapacitorů
3. Vyřešení obvodu jakoby odporového obvodu (se zdroji konstantních napětí a proudů a s rezistory). Ovšem konstantní napětí/proudy zdrojů jsou fázory (tj. komplexní čísla) a místo hodnot odporů jsou impedance (komplexní čísla). Lze použít jakoukoliv vhodnou metodu analýzy obvodů (viz přednáška o stejnosměrných obvodech). Analýzou se získají výsledná napětí a proudy jako fázory.
4. Převod fázorů do oblasti času. Fázory se převedou na sinusové funkce času, frekvence obvodu se nemění.

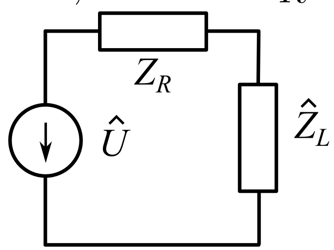
Řešený příklad Pro ustálený obvod podle horního obrázku určete časový průběh napětí na induktoru $u_L(t)$, je-li zadáno napětí zdroje $u(t) = 10\sin(2\pi 50 \cdot t + 0.5)$ V, odpor rezistoru $R = 5\ \Omega$ a indukčnost induktoru $L = 8$ mH



Řešení (pořadí kroků z minulého snímku):

1. Obvod je v harmonickém ustáleném stavu

2. Převod na fázory a impedance: $u(t) \to \hat{U}_m = 10 \cdot e^{j \cdot 0.5}$ V, $R \to \hat{Z}_R = R = 5\ \Omega$, $L \to \hat{Z}_L = j\omega L = j \cdot 314 \cdot 8 \cdot 10^{-3} = 2.5j\ \Omega$.



3. Řešíme obvod na spodním obrázku.

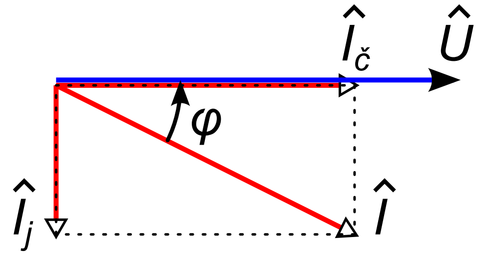
$$\hat{U}_{Lm} = \frac{\hat{Z}_L}{Z_R + \hat{Z}_L} \cdot \hat{U}_m = \frac{2.5j}{5 + 2.5j} \cdot 10 \cdot e^{j \cdot 0.5} = \frac{2.5e^{j \cdot 1.57} \cdot 10e^{j \cdot 0.5}}{5.59e^{j \cdot 0.46}} = 4.47e^{j \cdot 1.61}$$

4. Převod výsledku: $\hat{U}_L \to u_L(t) = 4.47\sin(2\pi 50 \cdot t + 1.61)$ V

8 Výkon v harmonických obvodech

Předpokládejme dvojpól protékaný proudem $i(t) = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{0I})$, jehož svorkové napětí je $u(t) = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{0U})$.

- Okamžitá hodnota výkonu je $p(t) = u(t) \cdot i(t)$
- Pomocí znázornění ve fázorovém diagramu lze proud rozdělit do činné složky $I_{\hat{c}}$ (ve směru napětí) a jalové složky I_j (ve směru kolmém na napětí).
  - $I_{\hat{c}} = I \cdot \cos\varphi$ činná složka proudu
  - $I_j = I \cdot \sin\varphi$ jalová složka proudu



- Okamžitá hodnota výkonu činné složky $p_{\hat{c}}(t) = UI_{\hat{c}}(1 - \cos 2\omega t)$
- **Činný výkon** je střední hodnotou výkonu v době jedné periody

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\mathrm{d}t = UI\cos\varphi \text{ [W]}$$

- Činný výkon odpovídá nevratným změnám elektrické energie na jinou formu

- Okamžitá hodnota výkonu jalové složky $p_j(t) = UI_j \cos 2\omega t)$
- Střední hodnota jalové složky proudu je nulová. Jalová složka během periody nabývá kladných i záporných hodnot a odpovídá periodickým vratným výměnám energie mezi vnějším obvodem a dvojpólem. Při kladných hodnotách dodává zdroj energii do dvojpólu, při záporných hodnotách dodává dvojpól energii zpět do zdroje.
- **Jalový výkon** je výkon jalové složky proudu

$$Q = UI_j = UI \sin \varphi \text{ [VAr]}$$

- Rozměr VAr (voltampér reaktanční) je stejný jako W (watt), ale má jiný fyzikální význam.
- **Zdánlivý výkon** je v jednotkách voltampérů. Na něm závisí celkové rozměry a energetické možnosti energetických elektrických strojů (generátory, transformátory).

$$S = UI = P^2 + Q^2 \text{ [VA]}$$

- **Účiník** je definován jako $\cos \varphi$

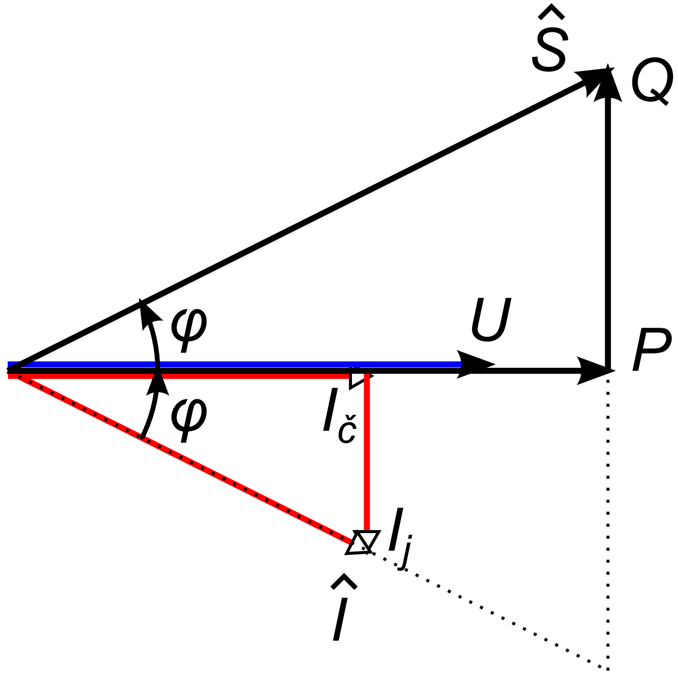
Komplexní výkon $\hat{S}$

- Vycházíme z fázorů $\hat{U} = U e^{j \cdot \varphi_{0U}}$, $\hat{I} = I e^{j \cdot \varphi_{0I}}$

- Definujeme komplexní výkon $\hat{S}$:

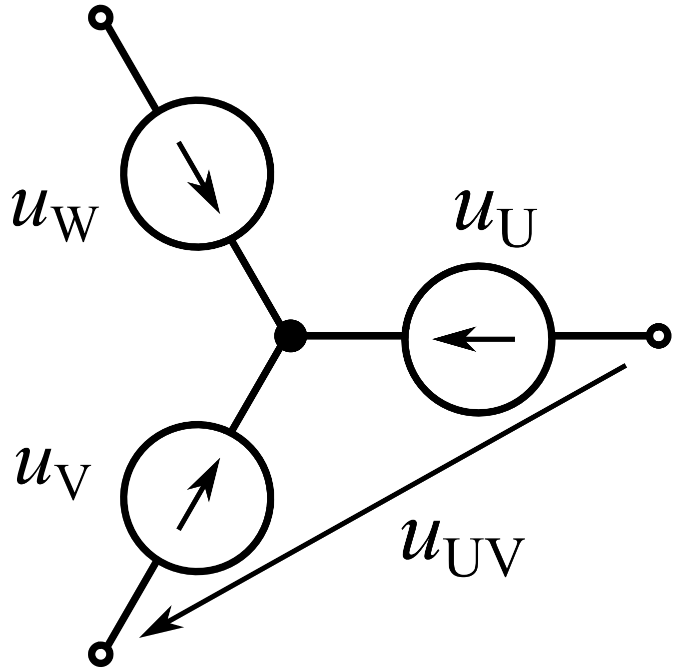
$$\hat{S} = \hat{U} \cdot \hat{I}^* = U \cdot I \cdot e^{j \cdot (\varphi_{0U} - \varphi_{0I})} = U \cdot I \cdot e^{j \cdot \Delta\varphi} = UI \cos\varphi + j \cdot UI \sin\varphi = P + j \cdot Q$$

- Potom je $P = \mathrm{Re}\{\hat{S}\}$, $Q = \mathrm{Im}\{\hat{S}\}$ a $S = |\hat{S}|$



9 Příklady

Příklad 5_1: Určete průběh sdruženého napětí u_{UV}.



Zadáno:

$u_U = 325\sin(2\pi f \cdot t)$

$u_V = 325\sin(2\pi f \cdot t - \frac{2\pi}{3})$

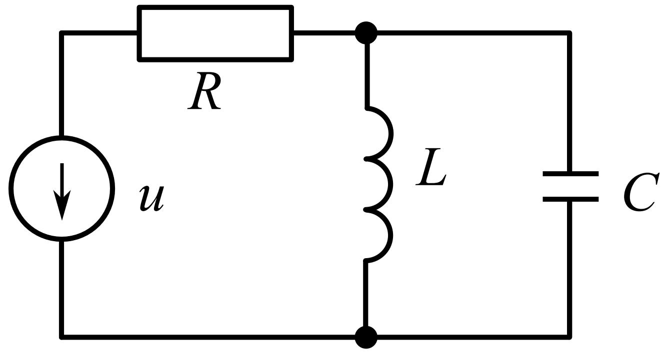
$u_W = 325\sin(2\pi f \cdot t + \frac{2\pi}{3})$

Příklad 5_2: V ustáleném obvodu určete průběh proudu i_C.

Zadáno:

$u = 10 \sin(100 \cdot t)$

$R = 400\ \Omega,\ \ L = 1\ \mathrm{H}, C = 20\ \mu\mathrm{F}$



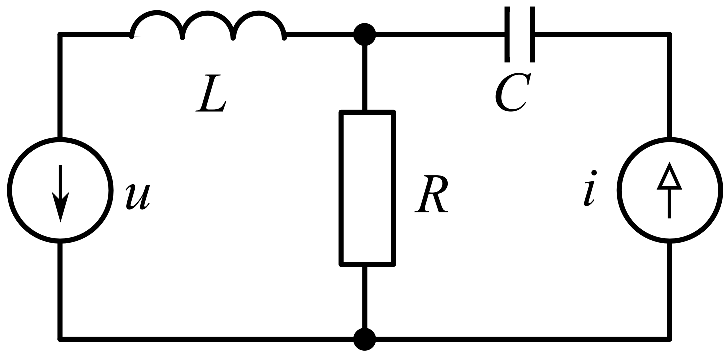
Příklad 5_3: V ustáleném obvodu určete průběh proudu i_R a napětí u_R.

Zadáno:

$u = 5\sin(200 \cdot t)$

$i = 0.2\sin(100 \cdot t - 2)$

$R = 500\ \Omega,\ \ L = 1\ \mathrm{H}, C = 5\ \mu\mathrm{F}$



Literatura

1. Havlíček V., Pokorný M., Zemánek I.: Elektrické obvody 1, ČVUT 2005