(1831-1879)

ZEKT - Předn. č. 8 - Maxwellovy rovnice - myšlenkové odvození

1\. MR $\operatorname{div} \vec{D} = \varrho$ (Gaussův zákon elstat. pole) — elstat. pole je zřídlové

2\. MR $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ (Gaussův zákon mgstat. pole) — mgstat. pole není zřídlové

3\. MR $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ (Ampérův zákon) — náboje v pohybu vytvářejí vírové mg. pole

4\. MR $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (Faradayův zákon) — změna mg. pole indukuje vírové el. pole

Vychází z publikace Szántó L.: Maxwellovy rovnice, 2. vyd., BEN, 2012

Nutné vstupní znalosti: derivace, integrál, skalární a vektorový součin - Jak se píší součiny

3 doplňkové rovnice: $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ $\left[\frac{C}{m^2}; \frac{F}{m}; \frac{V}{m}\right]$ ($\frac{N}{C}$)

$\vec{B} = \mu \vec{H}$ $\left[\frac{N}{A \cdot m}; \frac{H}{m}; \frac{A}{m}\right]$

(diferenciální) Ohmův zákon $\rightarrow$ $\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$; $\sigma \left[\frac{S}{m}\right]$ ... specifická vodivost $\left[\frac{A}{m^2} = \frac{S}{m} \cdot \frac{V}{m}\right]$

(v ostatních materiálech ZEKT označeno γ gamma)

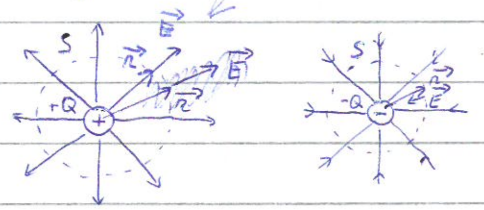
Postuláty: - existují el. náboje, které na sebe působí silou. Souhlasné náboje se odpuzují, nesouhlasné náboje se přitahují.

- proudy ve vodičích (náboje v pohybu) na sebe působí silou. Souhlasné proudy se přitahují, nesouhlasné proudy se odpuzují. Proudy navzájem kolmé na sebe nepůsobí silou.

- uvedené síly lze kvantifikovat pomocí hustoty siločar (počet siločar protínajících plochu dělený velikostí plochy) (pokud jsou siločáry prezentovány v souladu s principem superpozice a prostorové symetrie)

ELEKTROSTATICKÉ POLE

Siločáry, Coulombův zákon ve vakuu - siločára - orientovaná myšlená čára (křivka) ve směru pohybu kladného náboje. (ukázat)



- silové působení na libovolný náboj q $\Rightarrow$ intenzita el. pole $\vec{E}$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad \left[\frac{N}{C}\right], \text{ též (viz dále) } \left[\frac{V}{m}\right]$$

Princip superp. $\Rightarrow$ víc Q, víc siločar

- povrch koule S protíná nezávisle na r vždy stejný počet siločar $\Rightarrow$ $E = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q}{4\pi r^2}$ ... povrch (koule), kde

!úměrná hustotě siločar! — konstanta prostředí — velikost náboje

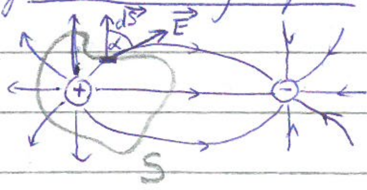
$\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \left[\frac{F}{m}\right]$ ... konstanta úměrnosti

hustota siločar = počet siločar protínajících plochu dělený velikostí plochy

$$F = E \cdot q = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q \cdot q}{4\pi r^2}$$

doplnění směru síly $\rightarrow$ Coulombův zákon $\vec{F} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q}{4\pi r^3} \vec{r}$ ($\vec{F}$ působí na q, Q je zdroj pole)

(Vý)tok intenzity el. pole



- počet siločar nezávisí na tvaru ani velikosti plochy S. (jen na počtu obklopených nábojů)

$\Rightarrow$ a tím i tok intenzity el. pole $\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$

integrál přes uzavřenou plochu S — skalární součin

- 1 bodový náboj Q_i, S... povrch koule: $\phi_i = 4\pi r^2 \cdot E = 4\pi r^2 \cdot \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_i}{4\pi r^2} = \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$

- N nábojů $\sum_{i=1}^{N} Q_i = \varepsilon_0 \sum_{i=1}^{N} \phi_i = \varepsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$

{ el. indukční tok ψ [C] — náboj obklopený plochou S

$\psi = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$

(vý)tok el. indukce }

První Maxwellova rovnice

Mějme spojitě rozložené náboje o hustotě nábojů $\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum Q_i}{\Delta V}$ ← náboj v objemu ΔV $\left[\frac{C}{m^3}\right]$

ρ nemusí být konstanta, ale v místě prostoru dV bude konstantní.

$$\left(\sum_{i=1}^{N} Q_i\right) = \rho \cdot dV = \varepsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad \Rightarrow \quad \rho = \varepsilon_0 \cdot \lim_{S \to 0} \frac{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}{dV} = \varepsilon_0 \cdot \operatorname{div} \vec{E}$$

to je definice **divergence** $\vec{X} = \operatorname{div} \vec{X}$ (libovolný vektor)

Zavedeme vektor indukce el. pole $\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E}$ (ve vakuu) $\left[\frac{C}{m^2}\right]$ (důležitá jednotka) a dostaneme

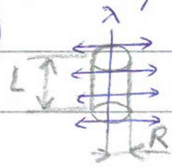
první Maxwellovu rovnici: $\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \rho}$ (Gaussův zák. elstat. pole)

jednotka divergence ... $\frac{1}{m}$

- když uvnitř uzavř. plochy S jsou náboje → $\operatorname{div} D \neq 0$; nejsou → $\operatorname{div} D = 0$
- elstat. pole je zřídlové

(v kartézských souřadnicích lze psát divergenci pomocí nabla operátoru $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ (jednotkový vektor ve směru osy x) jako $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ (skalární součin))

(Příklad - pole liniového náboje $\lambda \left[\frac{C}{m}\right]$



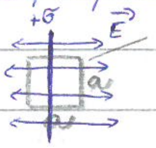
(vý)tok intenzity z válce: $\lambda L = \varepsilon_0 2\pi R L E$ (náboj; tok intenzity)

$$\Rightarrow E = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\lambda}{2\pi R}$$

1. Maxw. rovnice přímo: $\frac{2\pi R L \cdot D}{\pi R^2 L} = \frac{\lambda L}{\pi R^2 L} \Rightarrow D = \frac{\lambda}{2\pi R}$ (ΔV))

Elektrické pole plošného náboje $\sigma \left[\frac{C}{m^2}\right]$

Na obr. je řez - plocha kolmá k náčrtu



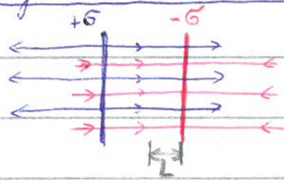
krychle o straně a

tok intenzity z krychle: $\sigma a^2 = \varepsilon_0 2 a^2 E$ (náboj; tok intenzity)

$$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Energie elektrostatického pole

→ dva plošné náboje opačného znaménka. Vně desek se pole odečítá, uvnitř sčítá.



$$E = 2\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Na ploše S je náboj σS, na nějž působí síla $F = E_1 \sigma S = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \sigma S = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 S$ (na 1. desce; na 2. desce)

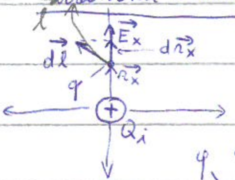
Může-li se S pohybovat, vykoná práci $W = F.L = \frac{\varepsilon_0 E^2 S L}{2}$ = energie el. pole o objemu SL

Hustota energie $w_{el} = \frac{W}{V} = \varepsilon_0 \frac{E^2}{2} = \frac{ED}{2}$ $\left[\frac{J}{m^3}\right]$ („elektrostatické váhy")

(($w_{el} = \frac{ED}{2}$ platí i pro látková prostředí, ale jen pro lineární. Pro feroelektrika (obecně) $w_{el} = \int_{E_1}^{E_2} D\,dE$ ⇒ (plocha hysterezní smyčky v ED diagramu ~ energii, která se přemění v teplo a zahřeje dielektrikum)

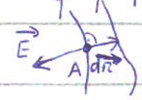
Potenciál elektrostatického pole

- práce, kterou vykoná jednotkový kladný náboj, když se přemístí z bodu P (v el. poli) do nekonečna



$$\varphi = \frac{W}{q} = \frac{1}{q}\int_P^\infty \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad [V]$$, proto je také jednotkou $E \left[\frac{V}{m}\right]$

pro bodový náboj Q_i platí: $\varphi_i = \int_r^\infty \vec{E}_x \cdot d\vec{l} = \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{1}{r^2} dr_x = \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_r^\infty = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$



Pro pole více nábojů v bodě A platí: $E = \lim_{dr \to 0} \frac{d\varphi}{dr}$, směr $\vec{E}$ je $-\frac{d\vec{r}}{dr}$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$$ (operátor **gradient**: $\operatorname{grad}\varphi = \lim_{dr \to 0} \frac{d\varphi}{dr} \cdot \frac{d\vec{r}}{dr}$) (musí být skalár)

(V kartézských souřadnicích je $\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi \Rightarrow \vec{E} = -\nabla\varphi$)

Elektrostatické pole je konzervativní, práce nezáleží na tvaru dráhy, $\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ (1. MR) (ne tak vírové el. pole, viz dále 4. MR)

Spojitě rozložené náboje: $\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = -\varepsilon_0 \nabla \cdot \nabla\varphi = -\varepsilon_0 \cdot \Delta\varphi$ ... Poissonova rovnice, kde **Laplaceův operátor** $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

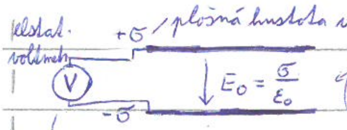
popisuje potenciální pole spojitě rozložených nábojů hustoty ρ

(Elstat.)

Elektrické pole v látkovém prostředí

vakuum:

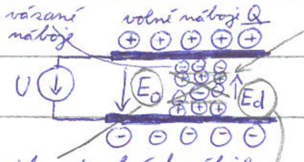
elstat. voltmetr; $+\sigma$ / plošná hustota volných nábojů



$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ (pro $S \gg d$ je pole homogenní)

↳ pokud mezi desky vložíme dielektrikum, (V) ukáže nižší hodnotu

mezi deskami bude dielektrikum

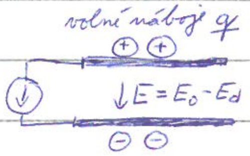


náboje uvnitř se navzájem kompenzují

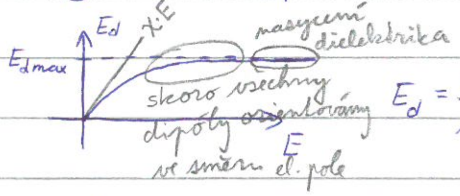
intenzita od volných nábojů

intenzita od vázaných nábojů (polarizovaného dielektrika)

volné náboje q



$Q = \varepsilon_r \cdot q$



$$E_d = \frac{\chi \cdot E}{1 + \frac{\chi \cdot E}{E_{d\,max}}}$$, kde χ [-]... dielektrická susceptibilita

(vektor polarizace $\vec{P} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E_d}$ $\left[\frac{C}{m^2}\right]$)

Pro malé hodnoty E je $E_d \doteq \chi \cdot E$ $\Rightarrow$ $E = E_0 - E_d = E_0 - \chi \cdot E$ $\Rightarrow$ $E = \frac{E_0}{1+\chi} = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$, kde

$\varepsilon_r = 1 + \chi$ [-] ... relativní permitivita

$\Downarrow$

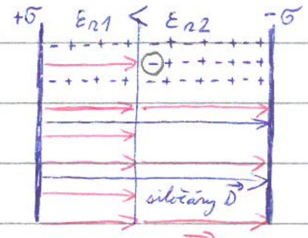
$\downarrow E \Rightarrow \downarrow$ výchylka voltmetru (vysvětlení 1. obrázku)

další důsledek: při stejném napětí mezi deskami nahromadí více volných nábojů kondenzátor s vyšší ε_r.

(Hodnoty ε_r: vakuum ... 1; vzduch ... 1,006; voda ... 81, dřevo ... 2 ÷ 7; sklo ... 4 ÷ 19; spec. keramika pro kondenzátory až 10^5 → už mohou být feroelektrické ...)

Sériové řazení dielektrik

... siločáry $\vec{E}$ ... na rozhraní diskontinuita (vázané náboje ⊖)

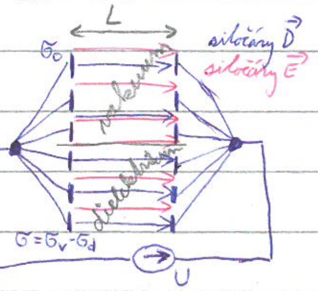


... siločáry $\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E}$ $(\varepsilon \vec{E}) = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\vec{E_0}}{\varepsilon_r} = \varepsilon_0 \vec{E_0}$ ... spojité i přes rozhraní

1. MR $\Rightarrow$ $\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \rho}$ ... platí i pro látkové prostředí s tím, že ρ je objemová hustota volných (ne vázaných) nábojů

Paralelní řazení dielektrik

- v horní části vakuum, v dolní dielektrikum, destičky izolovány (aby se náboje nemíchaly)



Zdroj napětí $U = L E_0 = L E$ (nahoře) (dole) $\Rightarrow$ $E = E_0$ .... homogenní pole $\vec{E}$

Vakuum ... volné náboje σ_0 ; Dielektrikum: volné náboje σ_v a vázané náboje σ_d

(Intenzita $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ $\Rightarrow$) $E_0 = E$ $\Rightarrow$ $\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$ (vakuum) $= \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$ (dielektrikum) $\Rightarrow$ $\sigma = \varepsilon_r \cdot \sigma_0$ (nad dielektrikem je větší hustota volných nábojů než nad vakuem)

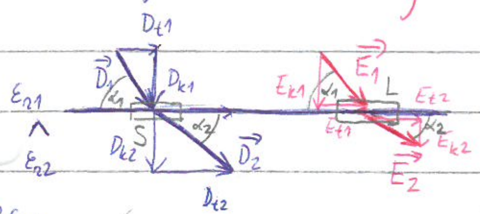
Pole $\vec{D}$ vytváří volné náboje $\Rightarrow$ $\vec{D}_{diel.} = \varepsilon_r \cdot \vec{D}_{vakuum}$ ... diskontinuita $\vec{D}$ na rozhraní

Lom siločar na rozhraní dielektrik

Z hlediska indukce D_k ... sériové řazení dielektrik $\Rightarrow D_{k1} = D_{k2}$

D_t ... paralelní —//— $\frac{D_{t1}}{\varepsilon_{r1}} = \frac{D_{t2}}{\varepsilon_{r2}}$ $\left(\Rightarrow \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}\right)$

siločáry indukce intenzity



Z hlediska intenzity E_k ... sériové řazení dielektrik $\varepsilon_{r1} \cdot E_{k1} = \varepsilon_{r2} \cdot E_{k2}$ $\left(\Rightarrow \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}\right)$

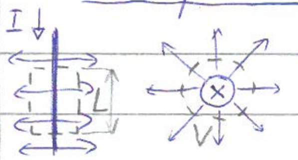
E_t ... paralelní —//— $E_{t1} = E_{t2}$

$\varepsilon_{r2} = 2\,\varepsilon_{r1}$

($\operatorname{div} \vec{D} = \rho$ $\Downarrow$ $D_{k1} = D_{k2}$; $0 = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow E_{t1} = E_{t2}$)

MAGNETOSTATICKÉ POLE

Silové pole nekonečně dlouhého vodiče s proudem I (ve vakuu)

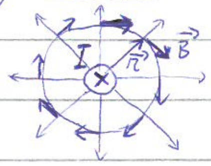


„siločáry el. proudu" – jejich počet klesá úměrně s délkou obvodu válce $2\pi r$ (element proudu → víc I = víc siločar)

Jiný vodič s proudem I_1 – na úsek L působí síla $F = \mu_0 \frac{I \cdot L}{2\pi r \cdot L} I_1 L$ (Ampérův zákon), kde (hustota siločar; plášť válce)

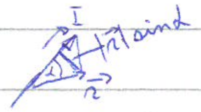
μ_0 ... permeabilita vakua; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\, \frac{H}{m}$ ... konstanta úměrnosti

Magnetická indukce pole přímého vodiče s proudem



Kolmo na „siločáry el. proudu" jsou směry, kam by ukazovala střelka kompasu. Na střelku (mg. dipól) působí tedy síla. Silové působení nazveme magnetickou indukcí $\vec{B}$ [T].

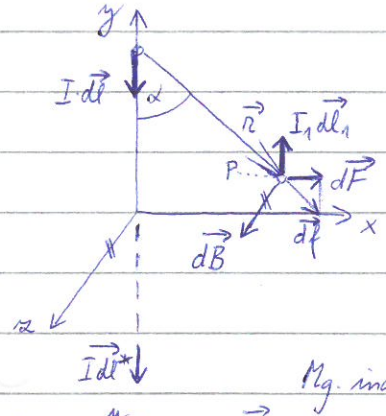
- Směr B ... ve směru vektorového součinu $\vec{I} \times \vec{r}$ (kde $\vec{r}$ je polohový vektor)
- Velikost $B = \frac{F}{I_1 L} = \frac{1}{I_1 L}\left(\mu_0 \frac{I}{2\pi r} I_1 L\right) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$ ... síla působící na jednotkovou délku jednotkového proudu nábojů, které se pohybují kolmo na $\vec{B}$.



$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi r^2}(\vec{I} \times \vec{r})$ ... (platí pouze pro proud I nekonečně dlouhého vodiče)

Biot-Savartův (-Laplaceův) zákon

(o příspěvku krátkého vodiče s proudem k poli $\vec{B}$)



„Siločáry el. proudu" – jejich hustota je úměrná $\frac{1}{4\pi r^2}$ (povrch koule) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Mezi 2 elementy působí síla $df = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl}{r^2} I_1\, dl_1$ (analogie Coulombova zákona)

(Složky síly f rovnoběžné s $I\vec{dl}$ se odečtou díky $I\vec{dl}^*$ (nekonečný vodič)), uplatní se pouze kolmý průmět $dF = df \cdot \sin\alpha$, příspěvek $I\,dl$ k B je $dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl}{r^2}\sin\alpha$

$\Rightarrow$ včetně směru pak $\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\vec{dl} \times \vec{r}}{r^3}$ ... Biotův-Savartův (-Laplaceův) zákon

Mg. indukce celého uzavřeného vodiče s proudem: $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint \frac{I\,\vec{dl} \times \vec{r}}{r^3}$ (vektorový součet (integrál) příspěvků všech elementů vodiče)

(Síla působící po délce L vodiče s proudem I_1 je $\vec{F} = I_1 \int_L \vec{dl_1} \times \vec{B}$)

Druhá Maxwellova rovnice

- magnetické pole je určeno siločárami mg. indukce $\vec{B}$
- siločáry $\vec{B}$ jsou vždy uzavřené (nikde nezačínají/nekončí), protože neexistuje „magnetický monopól" (pouze dipól).

$\forall S: \lim_{S \to 0} \frac{\oint_S \vec{B} \cdot \vec{dS}}{dV} = 0 \iff \boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0}$ (Gaussův zákon magnetostatického pole)

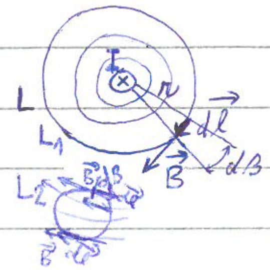
(= mgstat. pole není zřídlové)

850

Dráhový integrál $\vec{B}$ – souvislost proudu a jeho magnetických účinků / B nekoneč. přím. vodiče

$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}$

1. obrázek: $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_L B\, dl = \int_0^{2\pi} B r\, d\beta = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r}{r}\, d\beta = \mu_0 I$



ve vakuu: $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ $\left[\frac{A}{m}\right]$ ... intenzita magnetického pole

$\Rightarrow \oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I$

opsaný úhel β je 2π

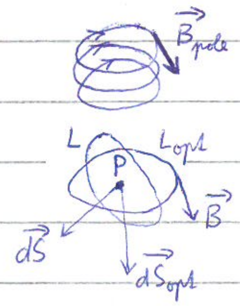
Pokud L_1 je libovolná dráha obepínající proud: $\oint_{L_1} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_{L_1} B\underbrace{\cos\alpha\, dl}_{\text{průmět } dl \text{ roviny kolmé k vodiči}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\beta = \mu_0 I$

opsaný úhel β je 0.

Pokud L_2 je libovolná dráha neobepínající proud: $\oint_{L_2} \vec{B}\, d\vec{l} = \oint_{L_2} B\cos\alpha\, dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\beta = 0$

(pozn.: Obepínání: Nad integrační drahou L zvolíme plochu S (ohraničena L). Obepínán je vodič, který protíná plochu (lichý počet)-krát.)

Rotace $\vec{B}$ – algoritmus, jak určit vektor rotace $\vec{B}$ (rot $\vec{B}$) v bodě P v poli $\vec{B}$ pole



1) Zvolíme plošku $d\vec{S}$ ($P \in d\vec{S}$), ohraničení L plošky dS je integrační drahou. Orientace plošky je kolmo k ploše, dle pravé ruky (prsty ve směru $d\vec{l}$, palec → směr $d\vec{S}$).

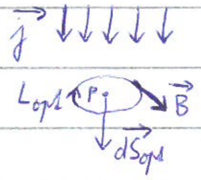
2) Pro dráhu L vypočítáme dráhový integrál $\int_L \vec{B}\cdot d\vec{l}$

3) Hledáme takovou orientaci plošky, pro níž podíl $\frac{\int_L \vec{B}\cdot d\vec{l}}{dS}$ bude maximální pro $dS \to 0$.
pro $dS \to 0$. Příslušnou dS nazveme dS_{opt}, příslušnou L nazveme L_{opt}.

4) $\underbrace{\text{rot } \vec{B}}_{\text{vektor rot } \vec{B} \text{ v bodě } P} = \frac{d\vec{S}_{opt}}{dS_{opt}} \cdot \lim_{dS_{opt}\to 0} \frac{\int_{L_{opt}} \vec{B}\cdot d\vec{l}}{dS_{opt}}$ (platí pro libovolné vektorové pole $\vec{X}$)

„jednotka rotace" $\left[\frac{1}{m}\right]$ (v kartézských souřadnicích: rot $\vec{B} = \nabla \times \vec{B}$)

Třetí Maxwellova rovnice – zobecňuje $\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I$ pro proudy, které jsou spojitou funkcí prostředí



Hustota proudu $\vec{j}$ $\left[\frac{A}{m^2}\right]$ $\quad j = \lim_{dS\to 0} \frac{I}{dS}$ ← prochází skrz dS

Při optimální orientaci dS_{opt} je $\oint_{L_{opt}} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 j\, dS_{opt}$

$\text{rot } \vec{B} = \frac{d\vec{S}_{opt}}{dS_{opt}} \frac{\oint_{L_{opt}} \vec{B}\cdot d\vec{l}}{dS_{opt}} = \mu_0 \vec{j}$ $\qquad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \Rightarrow \text{rot } \vec{H} = \vec{j}$

jednotka $\left[\frac{C}{m^2 s} = \frac{A}{m^2}\right]$

Maxwellův posuvný proud: na mg pole má časová změna el. indukce $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ stejné účinky jako $\vec{j}$
– objasňuje existenci elektromagnetických vln (viz dále)

ROVNICE KONTINUITY

	VODNÍ NÁDRŽ		1. Kirchhoffův zákon		Elektromagnetické pole	
	STATICKÝ REŽIM	DYNAMICKÝ REŽIM	STATICKÝ REŽIM	DYNAMICKÝ REŽ.	STATICKÝ REŽIM	DYNAMICKÝ REŽIM
	P_r1, P_r2 → P_r3 $\left[\frac{m^3}{s}\right]$	P_r1, P_r2 → P_r3	I_2, I_1, I_3	I_2, I_1, I_3, I_c, C, $\frac{dQ}{dt}$; $\Sigma I + I_c = 0$	$\vec{j}$	$\vec{j}$; $\rho = \text{div } \vec{D}$; $\text{div } \vec{j} + \frac{d\rho}{dt} = 0$
$\forall t$:	$\Sigma P_r = 0$	$\Sigma P_r - \frac{dV}{dt} = 0$	$\Sigma I = 0$	$\Sigma I + \frac{dQ}{dt} = 0$	$\text{div } \vec{j} = 0$	$\text{div}\left(\vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt}\right) = 0$

– $j = \frac{I}{S} = \frac{\Delta Q}{\Delta t\, S}\frac{\Delta L}{\Delta L} = \frac{\Delta Q}{\Delta V}\frac{\Delta L}{\Delta t} = \rho v$ ... náboje v pohybu (vodivý proud)

Třetí Maxwellova rovnice: $\boxed{\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$ (Ampérův zákon)

Lorentzova síla

$\vec{F} = Q(\vec{v} \times \vec{B})$ pro mg. pole. $\quad \vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$ pro elmag. pole

$\vec{v}$ … rychlost pohybu kladného náboje

$\left(F = BIl = B\frac{\Delta Q}{\Delta t}\Delta l = B\cdot v\cdot Q \text{ ... velikost}\right)$
je-li $\vec{v} \perp \vec{B}$
$I \parallel l$

980

Magnetické pole v látkovém prostředí – odvíjí se od rotace elektronů v atomech (od spinu) ⇒ proud ⇒ mg. pole.

– jak jsou dráhy elektronů „ochotné" k natáčení se do směru vnějšího pole $\vec{B}$, čímž jej zesílí.

$B = B_0 + B_m$; kde B… celková indukce, B_0… indukce vnějšího pole, B_m… pole dané uspořádáním původně chaotických molekulárních proudů.

$B_m \doteq \mu_0 \dfrac{\chi H}{1+\mu_0 \dfrac{\chi H}{B_{m\,max}}}$, kde χ… mg. susceptibilita [-], $B_{m\,max}$… B_m když jsou všechny mol. proudy do směru $\vec{B_0}$.

Slabá pole: $B = B_0 + B_m \doteq \mu_0 (1+\chi) H = \mu_0 \mu_r H$, kde μ_r [-]… relativní permeabilita

Silná pole: $B = B_0 + B_m \doteq \mu_0 H + B_{m\,max}$

FEROMAGNETIKA:

	μ_r
Permalloy	10^5
železo, ocel	$10^2 \div 10^4$

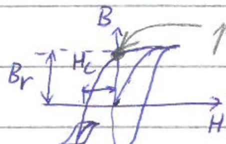
PARAMAGNETIKA

	$\chi = \mu_r - 1$
dusík	$0{,}007 \cdot 10^{-6}$
hliník	$22 \cdot 10^{-6}$
platina	$280 \cdot 10^{-6}$

DIAMAGNETIKA

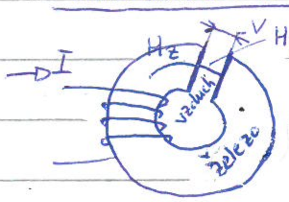
	$\chi = \mu_r - 1$
voda	$-0{,}002 \cdot 10^{-6}$
měď	$-8{,}9 \cdot 10^{-6}$
bismut	$-170 \cdot 10^{-6}$

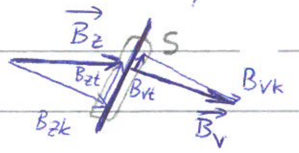
B-H diagram – ve vakuu je $B = \mu_0 H$, feromagnetika však mají $\mu_r \neq$ konst. (⇒ charakteristika nelineární) a účinek H na B se projevuje se zpožděním (retardací). Výsledkem je hysterezní smyčka.



B_r… remanentní indukce
H_c… koercitivní intenzita

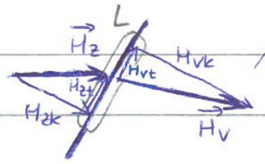
Lom siločar $\vec{B}$ a $\vec{H}$





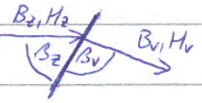
→ 2. MR ⇒ pro S těsně přiléhající k rozhraní: $B_{zk} = B_{vk}$

⇒ $\mu_{rz} \cdot H_{zk} = \mu_{rv} \cdot H_{vk}$



→ 3. MR ⇒ L těsně přiléhá, neprotíná ji proud

⇒ $H_{zt} = H_{vt}$ ⇒ $\dfrac{B_{zt}}{\mu_{rz}} = \dfrac{B_{vt}}{\mu_{rv}}$



$\mathrm{tg}\,\beta_v = \dfrac{\mu_{rz}}{\mu_{rv}} \cdot \mathrm{tg}\,\beta_z$

(viz např. pólové kryty $L = \frac{B_{stř}}{B_{max}}$)

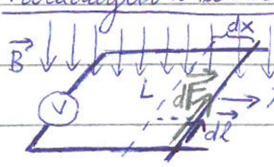
$\mu_{rz} \gg \mu_{rv}$ $\mathrm{tg}\,\beta_z \gg \mathrm{tg}\,\beta_v$ ⇒ vektory $\vec{B}$ a $\vec{H}$ vystupují ze železa do vzduchu podle kolmice

(Hustota energie magnetického pole $w_m = \dfrac{BH}{2}$, obecně $\Delta w_m = \int_{H_A}^{H_B} B\,dH$ ⇒ plocha hysterezní smyčky ~ energie $[\frac{J}{m^3}]$ přeměněné v teplo

Síla působící na póly elektromagnetu: hustota energie, vztah pro sílu → $f = \dfrac{\mu_0}{2} \dfrac{(zI)^2}{L_v^2}$ $[\frac{N}{m^2}]$)

ELEKROMAGNETICKÉ POLE

Faradayův indukční zákon



Vodič L klouže po kolejích v homogenním poli $\vec{B}$, koleje uzavřený (V).

Ve vodiči jsou volné náboje o délkové hustotě λ $[\frac{C}{m}]$. Na délkovém elementu je náboj λdl.

Na náboj λdl $(\doteq dQ)$ působí Lorentzova síla $d\vec{F} = \lambda dl (\vec{v} \times \vec{B})$

$\vec{v} \perp \vec{B}$ ⇒ $dF = \lambda dl \dfrac{dx}{dt} B$. Označme $d\phi = dl\,dx\,B$… tok indukce B přes elementární plošku

$\lambda = \dfrac{dQ}{dl}$ ⇒ $dU_i = dl \cdot E = \dfrac{dF}{dQ} = \dfrac{d\phi}{dt}$ … velikost napětí indukovaného v elementu dl vodiče

$(= dl \cdot \frac{dF}{dQ} = dl \cdot \frac{dF}{\lambda \cdot dl})$

Celkové elektromotorické napětí do sebe uzavřeného vodiče je $e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint \dfrac{dF}{dl\,\lambda} \cdot dl = \oint \dfrac{\lambda dl \frac{dx}{dt} B}{dl\,\lambda} dl = \dfrac{\oint B\,dx\,dl}{dt} = \dfrac{d\phi}{dt}$, kde $d\phi$ je změna celkového toku mg. indukce procházející plochou ohraničenou uzavřeným vodičem za čas dt.

Indukční tok se může měnit a tím indukovat elektromotorické napětí ze dvou důvodů:

a) „generátor" … vodič se pohybuje vzhledem k mg. poli

b) „transformátor" … vodič se nepohybuje ale mění se hodnota ϕ

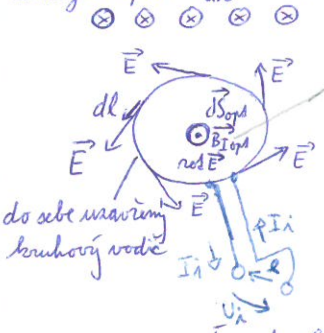
Lenzova poučka (o směru indukovaného napětí/proudu): e působí tak, aby jím vyvolaný proud bránil původní změně $\dfrac{d\phi}{dt}$

(v obrázku proud poteče dopředu (ve směru $d\vec{l}$) → tak síla na vodič s proudem bude působit vlevo a bude bránit změně)

→ tak vlevo se indukce odečítá, vpravo přičítá ⇒ vodič se bude chtít pohybovat vlevo

Čtvrtá Maxwellova rovnice

homogenní pole $\frac{d\vec{B}}{dt}$ – působí všude



vektor $\vec{B}$ pole indukovaného proudu – v souladu s Lenzovou poučkou je proti směru $\frac{dB}{dt}$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \frac{d\vec{S}_{opt}}{dS_{opt}} \left(\lim_{dS_{opt}\to 0}\right) \frac{\oint_{L_{opt}} \vec{E}\cdot d\vec{l}}{dS_{opt}} \quad \left[\frac{V}{m^2}\right]$$

$$\oint_{L_{opt}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = (\mathrm{rot}\,\vec{E})\cdot d\vec{S}$$

průmět plochy $d\vec{S}$ do optimální orientace (jen ten je vystaven působení $\frac{d\vec{B}}{dt}$ a podílí se na vzniku $\underline{e}$)

podílí se pouze průměty $\vec{E}$ na elementy $d\vec{l}$ (kolmé složky se nepodílejí, proud neteče kolmo na vodič)

Faradayův indukční zákon: $e = \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\vec{B}\cdot d\vec{S}}{dt}$

4. MR: $\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$ (Faradayův zákon)

- rovnice nakonec není o závitu vodiče, nýbrž o vztahu el. a mg. pole
- záporné znaménko jednoznačně definuje směr indukované intenzity (napětí) vůči směru $\frac{d\vec{B}}{dt}$
- pole indukované intenzity $\vec{E}$ je vířivé (nekonzervativní), tím se liší od pole elstat. intenzity

Elektromagnetické vlnění

Vlnění obecně popisuje tzv. vlnová rovnice $\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = c^2 \Delta X$, kde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, c … rychlost šíření vlny

Odvození vlnových rovnic z MR ve vakuu (kde $\vec{j} = 0$, $\rho = 0$, $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$, $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$)

MR: $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$; $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$; $\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$; $\mathrm{rot}\,\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ $\quad \Big/ \frac{\partial}{\partial t}$

$$\mathrm{rot}\,\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\,\mathrm{rot}\,\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{E}$$ …… vlnová rce ve vektorovém tvaru

Kartézské souřadnice:

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} = \nabla(\underbrace{\nabla\cdot\vec{E}}_{=0}) - \nabla^2\vec{E} = -\Delta\vec{E} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\Delta\vec{E}}$$

analogicky $\boxed{\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\Delta\vec{B}}$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \doteq 3\cdot 10^8\ \frac{m}{s}$$

Hustota energie elmag. vlny

Hustota energie elmag. pole: $u = \frac{1}{2}(ED + BH)$

Elmg. vlna: $\vec{B} = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\;\vec{i}\times\vec{E}$, kde $\vec{i}$ je směr šíření vlny

$$u = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right) = \varepsilon_0 B^2 c_0^2 = m_1 c_0^2$$

m_1 … hustota hmotnosti elmg. vlny v daném místě prostoru $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$

Př. anténa vyzáří 1 watt. Za sekundu vyzáří $W = 1\,J$ $\Rightarrow$ $M = \frac{W}{c_0^2} = \frac{1}{9\cdot 10^{16}} = 1{,}1\cdot 10^{-17}\ \frac{kg}{s}$

- vlna unikne do vesmíru $\Rightarrow \downarrow m_{zeměkoule}$ ($6\cdot 10^{24}$ kg)
- vlna dopadne na zem $\Rightarrow$ ekvivalentní část hmotnosti vlny se promění v tepelnou energii

Poyntingův vektor

= vektor, jehož velikost je rovna hustotě přenášeného výkonu $w = \frac{W}{dS\,dt} = EH$ (W … energie přenášená vlnou)
(energie na jednotku průřezu a času)
(výkon —— II ——)

- směr je ve směru šíření vlny

Poyntingův vektor $\vec{w} = \vec{E}\times\vec{H}$ $\left[\frac{VA}{m^2}\right]$
(též $\vec{S}$)

← stř. hodnota za delší dobu – I – zářivý výkon $\frac{W}{m^2}$ $\quad I = \langle w \rangle$ (S)
irradiance

Maxwellovy rovnice statického elektromagnetického pole

- neteče proud ($\vec{j} = 0$), veličiny se nemění v čase ($\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$; $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$)
- např.: nepohyblivý náboj v prostoru, permanentní magnet

1. MR $\quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho$
2. MR $\quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$
3. MR $\quad \operatorname{rot} \vec{H} = 0$
4. MR $\quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0$

Maxwellovy rovnice stacionárního elektromagnetického pole

- proud může téci, veličiny se nemění v čase
- např.: obvod ve stacionárním ustáleném stavu (stejnosměrný obvod)

1. MR $\quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho$
2. MR $\quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$
3. MR $\quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}$
4. MR $\quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0$

Maxwellovy rovnice kvazistacionárního elektromagnetického pole

- časové změny prostorového rozložení nábojů jsou dostatečně pomalé ($\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$). Zanedbává se vliv konečné rychlosti šíření pole, proud v daném okamžiku všude stejný
- např.: pomalu proměnlivá pole, střídavé proudy nízkého kmitočtu

1. MR $\quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho$
2. MR $\quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$
3. MR $\quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}$
4. MR $\quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Maxwellovy rovnice nestacionárního elektromagnetického pole

- projeví se konečná rychlost šíření pole, posuvný proud úměrný časové změně $\gamma \vec{E}$

1. MR $\quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho$
2. MR $\quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$
3. MR $\quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ … pokračování vodivého proudu dielektrikem formou posuvného proudu
4. MR $\quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Maxwellovy rovnice v integrálním tvaru

		obvyklé pořadí
1. MR	$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q = \int_V \rho \, dV$	3.
2. MR	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	4.
3. MR	$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(j + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{S}$	1.
4. MR	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B} \cdot d\vec{S}}{dt} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$	2.

Převod mezi integrálním a diferenciálním tvarem:

Stokesova věta: $\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S}$

převod křivkového integrálu po uzavřené křivce na plošný integrál počítaný přes libovolnou plochu ohraničenou touto křivkou.

Gauss(-Ostrogradského) věta $\oint \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{A} \, dV$

převod plošného integrálu na objemový počítaný přes objem uvnitř této plochy

930